

Часть I

**Синхронизация без формул**



## Глава 1

# Введение

### 1.1 Синхронизация в исторической перспективе

Голландский ученый Христиаан Гюйгенс (рис. 1.1), наиболее известный своими работами по оптике и конструкцией телескопа и часов, был, по всей видимости, первым исследователем, наблюдавшим и описавшим явление синхронизации еще в 17-ом столетии. Он открыл, что двое маятниковых часов, висящих на общей опоре, синхронизируются, т.е. их колебания идеально совпадают, а маятники движутся всегда в противоположных направлениях. Это открытие было сделано во время морских испытаний часов, предназначенных для определения долготы. Создание и конструирование маятниковых часов было одним из важнейших достижений Гюйгенса. Оно оказало огромное влияние на технологическое и научное развитие той эпохи и очень сильно увеличило точность определения времени. В 1658 году, спустя всего лишь два года после получения Гюйгенсом голландского патента на его изобретения, часовой мастер из Утрехта, Самюэль Костер, построил церковные маятниковые часы и гарантировал недельное отклонение менее восьми минут.

После этого изобретения Гюйгенс продолжил свои усилия по увеличению точности и устойчивости таких часов. Он уделял особое внимание конструированию часов, пригодных для использования на кораблях в открытом море. В своем трактате *Horologium Oscillatorium* (*Маятниковые часы, или геометрические demonstra-*

ции, касающиеся движения маятников применительно к часам), в котором он подвел итоги своим теоретическим и экспериментальным достижениям, Гюйгенс [Huygens 1673] привел детальное описание таких часов.

Маятник этих часов имел длину 9 дюймов и груз полфунта. Механизм приводился в движение гирями, заключенными в ящик вместе с механизмом. Длина ящика была 4 фута. Внизу он был отягчен по крайней мере 100 фунтами свинца, чтобы весь механизм возможно лучше сохранял на судне вертикальное положение.

Хотя движение часов в данных экспериментах было постоянным и очень равномерным, мы, тем не менее, предприняли дальнейшие усилия к их усовершенствованию, как описано



Рис. 1.1. Христиаан Гюйгенс (1629–1695), знаменитый голландский математик, астроном и физик. Среди его основных достижений – открытие первого спутника Сатурна и истинной формы его колец; первая печатная работа об исчислении вероятностей; исследования свойств кривых; формулировка волновой теории света, включая то, что известно сегодня как принцип Гюйгенса. В 1656 году Христиаан Гюйгенс запатентовал первые маятниковые часы, изобретение которых сильно увеличило точность измерений времени и помогло ему решить проблему определения долготы. Во время морских испытаний он наблюдал синхронизацию двух таких часов (см. также исторический обзор во введении к английскому переводу его книги [Huygens 1673]). Фотография: Rijksmuseum voor de Geschiedenis der Natuurwetenschappen, предоставлена American Institute of Physics Emilio Segre Visual Archives.

ниже. ... Результатом была еще бóльшая точность хода двух часов, чем ранее.

Более того, Гюйгенс кратко, но исключительно точно описал свое наблюдение синхронизации.

... Очень важно отметить, что когда мы подвесили двое таким способом сконструированных часов к одной и той же деревянной балке, оба маятника двигались всегда в противоположные стороны, и колебания так точно совпадали, что никогда ни на сколько не расходились. Тикание обоих часов было слышно в одно и то же мгновение. Если это совпадение искусственно нарушалось, то оно само восстанавливалось в короткое время. Сначала я был поражен этим странным явлением, но, наконец, после внимательного исследования нашел, что причина лежит в незаметном движении самой балки. Колебания маятника сообщают некоторое движение и самим часам, как бы тяжелы они ни были. А это движение передается балке, и, если маятники сами не двигались в противоположных направлениях, то теперь это произойдет с необходимостью, и только тогда движение балки прекратится. Но эта причина не была бы достаточно эффективна, если бы ход обоих часов не был с самого начала очень однороден и согласован между собой.

Первое упоминание об этом открытии может быть найдено в письме Гюйгенса к отцу от 26 февраля 1665 года, перепечатанном в собрании его трудов [Huygens 1967a] и воспроизведенном в приложении П1. Как следует из этого письма, обнаружение синхронизации

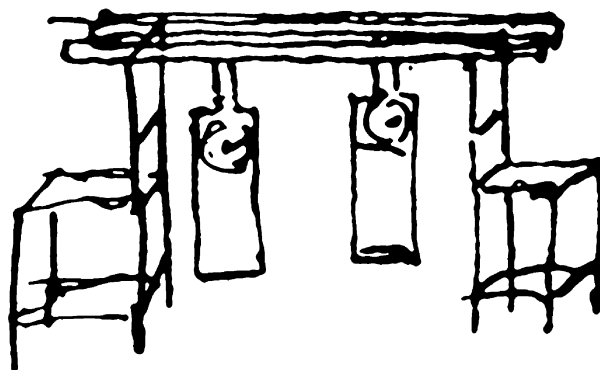


Рис. 1.2. Оригинальный рисунок Христиана Гюйгенса, иллюстрирующий его эксперименты с двумя маятниковыми часами, подвешенными к общей балке.

было сделано в то время, когда Гюйгенс был болен и вынужден был оставаться несколько дней в постели, наблюдая двое часов, висящих на стене (рис. 1.2). Интересно, что в своем описании открытия этого явления, Гюйгенс писал о «симпатии часов» (*le phénomène de la sympathie, sympathie des horloges*).

Таким образом, Гюйгенс не только привел точное описание, но также дал изумительное качественное объяснение эффекта **взаимной синхронизации**; он правильно понял, что согласованность ритмов двух часов была вызвана недоступными восприятию движениями балки. В современной терминологии это означает, что часы синхронизовались в противофазе за счет **связи** через балку.



Рис. 1.3. Сэр Джон Вильям Стретт, лорд Рэлей (1842–1919). Он учился в Тринити-Колледже Кембриджского университета и окончил его в 1864 году. Его первая статья 1865 года была посвящена электромагнитной теории Максвелла. Стретт работал над проблемой распространения звука и, во время путешествия в Египет, предпринятого для улучшения здоровья, он написал *Трактат о звуке* (1870–1871). В 1879 году он написал работу о бегущих волнах; из этой теории впоследствии выросла теория солитонов. Его теория рассеяния (1871) была первым правильным ответом на вопрос, почему небо голубое. В 1873 году он получил титул барона Рэлей. С 1879 по 1884 год он занимал должность профессора экспериментальной физики в Кембридже. Он был вторым после Максвелла, кто занимал эту должность, носящую имя Кавендиша. В 1884 году он стал секретарем Королевского Общества. В 1895 году Рэлей открыл инертный газ аргон – эта работа принесла ему в 1904 году Нобелевскую премию. Фотография: Photo Gen. Stab. Lit. Anst., предоставлена AIP Emilio Segrè Visual Archives.

В середине девятнадцатого столетия, в своем знаменитом труде *Теория звука*, Джон Вилльям Стретт, он же лорд Рэлей (рис. 1.3), следующим образом описал интересное явление синхронизации в акустической системе [Рэлей 1945].

Когда две органнне трубы с одинаковой высотой звука расположены рядом, возникают последствия, которые изредка приводят к практическим проблемам. В экстремальных случаях трубы могут заставить друг друга почти замолчать. Даже если взаимное влияние не столь сильно, то оно может, тем не менее, быть причиной того, что трубы будут звучать абсолютно в унисон, несмотря на неизбежные малые различия.



Рис. 1.4. Сэр Эдуард Виктор Эплтон (1892–1965). Получив образование в Кембриджском университете, он начал исследовательскую деятельность в Кавендишской Лаборатории под руководством В. Л. Брэгга. Во время первой мировой войны он заинтересовался электронными лампами и беспроводной передачей сигналов, что повлияло на всю его дальнейшую научную карьеру. Он вернулся в Кавендишскую Лабораторию в 1919 году, продолжая работать над лампами, и, совместно с Б. Ван-дер-Подем, над нелинейными проблемами, а также над атмосфериками. В 1924 году, совместно с М. Ф. Barnett, он провел решающий эксперимент, который позволил определить и измерить отражающий слой в атмосфере. В 1936 году он возглавил кафедру естественной философии в Кембридже, где он продолжал исследования ионосферных явлений. За исследования ионосферы он был награжден Нобелевской премией по физике 1947 года. Фотография предоставлена: AIP Emilio Segrè Visual Archives, E. Scott Barr Collection.

Итак, Рэлей не только наблюдал взаимную синхронизацию, когда различные, но схожие, органнне трубы, начинают звучать в унисон, но также и эффект **гашения (вымирания) колебаний**, когда связь приводит к подавлению колебаний во взаимодействующих системах.

Новый этап в исследовании синхронизации был связан с развитием электро- и радиотехники. 17 февраля 1920 года В. Экклес и



Рис. 1.5. Балтазар Ван-дер-Поль (1889–1959). Он изучал физику и математику в Утрехте, а затем отправился в Англию, где провел несколько лет, работая в Кавендишской Лаборатории в Кембридже. Там он встретился с Э. Эпплтоном, и они начали совместные исследования в области радиофизики. В 1919 году Ван-дер-Поль вернулся в Голландию, где в 1920 году получил докторскую степень Утрехтского университета. В 1922 году он принял предложение от компании Филипс и начал работать в исследовательской лаборатории Филипс в Эйнховене, где он вскоре стал директором по фундаментальным исследованиям в области радио. Ван-дер-Поль приобрел международную репутацию своими пионерскими работами по распространению радиоволн и по нелинейным колебаниям. Его исследования колебаний в контуре с триодом привели к выводу уравнения Ван-дер-Поля – одной из основных моделей теории колебаний и нелинейной динамики (см. уравнение (7.2)). Совместно с Ван-дер-Марком он первым применил теорию колебаний к физиологическим системам. Их работа по моделированию сердца человека тремя связанными релаксационными системами [van der Pol and van der Mark 1928] остается шедевром биологической физики. Фото предоставлено: Philips International B.V., Company Archives, Eindhoven, The Netherlands (см. подробную биографию в Bremmer [1960/61]).



Дж. Винсент подали заявку на британский патент, подтверждающий открытие ими свойства синхронизации триодного генератора – довольно простого электрического устройства, основанного на вакуумной радиолампе и предназначенного для генерации переменного тока [Eccles and Vincent 1920]. Частота колебаний тока определялась параметрами схемы, например, емкостью. В своих экспериментах, Экклес и Винсент связали два генератора со слегка различными частотами и продемонстрировали, что связь вынуждает системы осциллировать на общей частоте.

Несколькими годами позже Эдвард Эпплтон (рис. 1.4) и Балтазар Ван-дер-Поль (рис. 1.5) повторили и расширили эксперименты Экклеса и Винсента и сделали первый шаг в развитии теории этого эффекта [Appleton 1922; van der Pol 1927]. Рассмотрев простейший случай, они показали, что частота генератора может быть захвачена, или синхронизована, слабым внешним сигналом несколько другой частоты. Эти исследования имели огромное прикладное значение, так как триодные генераторы стали базовым элементом систем радиосвязи. Явление синхронизации использовалось для стабилизации частоты мощного генератора с помощью маломощного, но зато очень точного.

Теоретическое рассмотрение Эпплтона и Ван-дер-Поля было расширено и обосновано с точки зрения теории нелинейных колебаний А. А. Андроновым и А. А. Виттом (рис. 1.6). В двух работах [Андронов и Витт 1930b,a] они провели детальный анализ задачи о захватывании.

Синхронизация в живых системах также известна уже несколько столетий. В 1729 Жан-Жак Дорту де Мэран, французский астроном и математик, позднее – секретарь Королевской Академии наук в Париже, сообщил о результатах своих экспериментов с фасолью. Он заметил, что листья этого растения поднимаются и опускаются в соответствии со сменой дня и ночи. Сделав это наблюдение, де Мэран поместил фасоль в темную комнату и обнаружил, что движение листьев продолжается и без изменения освещенности окружающей среды. С тех пор подобные и значительно более сложные эксперименты были повторены в разных лабораториях, и теперь уже хорошо известно, что все биологические системы, от простейших и до высокоорганизованных, имеют внутренние биологические часы, снабжающие своего «владельца» информацией о смене дня и ночи. Разгадка устройства таких часов до сих пор является захватывающей проблемой, но уже твердо установлено, что они могут подстра-

ивать свои циркадные ритмы (от *circa* = примерно и *dies* = день) ко внешним сигналам: если такая система полностью изолирована от окружающей среды и содержится в неизменных условиях (постоянные освещенность, температура, давление, параметры электромагнитных полей и т.д.), то их внутренний цикл может существенно отличаться от суточного. В естественных условиях биологические часы подстраивают свои ритмы в соответствии с 24-часовым периодом земных суток.

В качестве последнего исторического примера процитируем еще одного голландца, врача Энгельберта Кэмпфера [Kämpfer 1727],<sup>1</sup> писавшего после своего путешествия в Сиам в 1680 году:

Светлячки ... представляют собой другое зрелище, которое возникает на некотором дереве, как сверкающее облако, при

<sup>1</sup> Цитата воспроизведена по [Buck and Buck 1968].



Рис. 1.6. Александр Александрович Андронов (1901–1952, левое фото) и Александр Адольфович Витт (1902–1938, правое фото) учились вместе в Московском Университете и начали научную деятельность в области теории колебаний под руководством Л. И. Мандельштама. Их продолжавшееся около десяти лет плодотворное сотрудничество привело к появлению ряда основополагающих работ в теории нелинейных колебаний, подытоженных в написанной совместно с С. Э. Хайкиным монографии «Теория колебаний» [Андронов и др. 1937]. Совместная научная работа прервалась в результате ареста и гибели А. А. Витта в сталинском ГУЛАГе.

тех удивительных обстоятельствах, что целый рой этих насекомых, завладев одним деревом и распространившись по его ветвям, время от времени прекращают свое свечение и моментом позже заставляют его появиться вновь с высочайшей регулярностью и точностью ...

Насколько нам известно, это первое опубликованное наблюдение синхронизации в большой популяции колебательных систем.

Мы заканчиваем наш исторический экскурс двадцатыми годами прошлого века. С тех пор множество интересных явлений синхронизации было обнаружено и описано в литературе (некоторые из них изложены в следующих главах) и, что еще более важно, постепенно стало ясно, что различные явления, на первый взгляд не имеющие ничего общего, подчиняются неким универсальным законам. Множество исследований, выполненных математиками, инженерами, физиками и специалистами из других областей, привели к пониманию того, что, скажем, согласованность звучания органных труб или же стрекотания сверчков не случайна, а может быть описана единой теорией. В следующих главах мы намереемся показать, что эти и множество других, кажущихся различными, эффектов имеют общие характерные особенности и могут быть объяснены в рамках единого подхода.

## 1.2 Синхронизация: краткое описание явления

Мы показали на нескольких вводных примерах (и мы проиллюстрируем это дальнейшими примерами ниже), что синхронизация встречается в различных областях науки, в технике и в социальном поведении. Мы не собираемся формулировать сейчас какое-либо строгое определение этого явления. Прежде, чем мы детально, хотя и без применения математических методов, обсудим это понятие в части I и прежде, чем мы приведем теоретическое описание в частях II и III, мы дадим здесь простое качественное описание этого эффекта; этот раздел может быть пропущен читателем со знанием основ физики и нелинейной динамики. Используя несколько характерных примеров, мы объясним, что такое синхронизация, и выделим общие свойства систем, допускающих этот эффект. Тем не менее, ответ на вопрос – почему так происходит? – будет отложен до главы 2.

### 1.2.1 Что такое синхронизация?

Мы понимаем синхронизацию как **подстройку ритмов осциллирующих объектов за счет слабого взаимодействия между ними**. За исключением редких случаев, когда будет явно сказано другое, эта концепция используется во всей книге. Чтобы качественно объяснить эту концепцию, сконцентрируемся на четырех следующих вопросах.

- Что такое осциллирующий объект?
- Что мы понимаем под словом «ритм»?
- Что такое взаимодействие осциллирующих систем?
- Что такое подстройка ритмов?

Для иллюстрации этой общей концепции возьмем классический пример – маятниковые часы.

#### *Автоколебательная система: модель естественного осциллятора*

Рассмотрим, как работают часы. Их механизм преобразует потенциальную энергию поднятого груза (или сжатой пружины, или электрической батареи) в колебательное движение маятника. В свою очередь, эти колебания преобразуются во вращение стрелок на циферблатах (рис. 1.7а). Нам не интересны частности устройства механизма; важно только, что он черпает энергию из некоторого источника и поддерживает постоянные колебания маятника, которые продолжаются без каких-либо изменений, пока не иссякнет приток энергии. Следующее важное свойство состоит в том, что форма колебательного движения полностью определяется внутренними параметрами часов и не зависит от того, как именно маятник был приведен в движение. Более того, если движение маятника слегка возмутить, то после некоторого переходного процесса маятник восстановит внутренне присущий ему ритм.

Такие свойства типичны не только для часов, но и для многих других колебательных объектов самой различной природы. Набор этих свойств определяет ответ на первый из сформулированных выше вопросов. В физике такие колебательные системы называют **автоколебательными**; ниже мы детально обсудим их свойства. Далее мы часто будем опускать слово «автоколебательная»; по умолчанию мы описываем только системы из этого класса. Подводя итоги, сформулируем кратко свойства автоколебательных систем.

- Такой осциллятор является **активной системой**. Он содержит внутренний **источник энергии**, которая трансформируется в колебательное движение. Будучи изолированным, осциллятор продолжает генерировать один и тот же ритм, пока не иссякнет источник энергии. Математически такой осциллятор описывается **автономной** (т.е. без явной зависимости от времени) динамической системой.
- Форма автоколебаний определяется параметрами системы и не зависит от того, как система была «включена», т.е. от перехода к стационарным колебаниям.
- Автоколебания устойчивы по отношению к (по крайней мере малым) возмущениям: будучи возмущенными, колебания вскоре восстанавливают свою исходную форму.

Примерами автоколебательных систем являются электронные автогенераторы, лазеры, среды, в которых идут реакция Белоусова-Жаботинского или другие колебательные химические реакции, водители ритма (пейсмекеры) сердца человека (например, синоатриальный узел) или кардиостимуляторы, используемые при кардиологических патологиях, и многие другие естественные или искусственные системы. Как мы увидим далее, замечательным общим свойством таких систем является их способность к синхронизации.

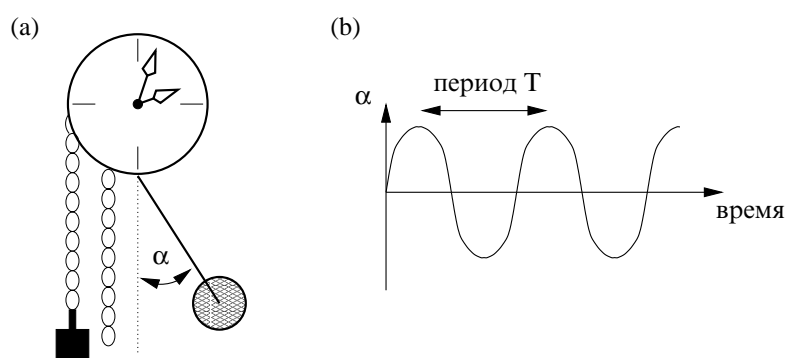


Рис. 1.7. (а) Пример автоколебательной системы – маятниковые часы. Потенциальная энергия поднятого груза преобразуется в колебания маятника и, в конечном итоге, приводит к вращению стрелок. (б) Движение маятника – периодическое, т.е. его угол  $\alpha$  по отношению к вертикали изменяется во времени с периодом  $T$ .

### Характеристики ритма: период и частота

Автоколебательные системы могут демонстрировать ритмы самой разной формы, от простых, близких к синусоиде, сигналов до последовательности коротких импульсов. Охарактеризуем такие ритмы количественно, используя наш частный пример – маятниковые часы. Колебания маятника – периодические (рис. 1.7b), и **период**  $T$  есть главная характеристика часов. Действительно, вращающий стрелки механизм на самом деле подсчитывает число колебаний маятника, так что его период составляет минимальную единицу отсчета времени.

Часто бывает удобно характеризовать ритм числом колебаний в единицу времени или же **частотой** колебаний

$$f = \frac{1}{T}.$$

При теоретическом анализе колебаний более удобной часто бывает **угловая частота**  $\omega = 2\pi f = 2\pi/T$ ; ниже мы часто опускаем слово «угловая» и называем ее просто частота. Далее мы увидим, что частота может изменяться за счет внешнего воздействия на осциллятор или же взаимодействия с другой системой. Чтобы избежать неоднозначности, мы назовем частоту автономной (изолированной) системы *автономной частотой*.

### Связь между колебательными объектами

Предположим теперь, что у нас есть не одни часы, а двое. Даже если они одного и того же типа и сделаны одним производителем, то они только кажутся идентичными, но это не так. Какие-либо параметры механизма всегда различаются, пусть всего лишь на десятую долю процента, но это мельчайшее различие приводит к различию в периодах колебаний. Следовательно, эти двое часов будут показывать немного различное время, и, если мы посмотрим на них в какой-нибудь момент времени, то скорее всего увидим, что маятники находятся в разных положениях (рис. 1.8).

Представим теперь, что эти двое неидентичных часов не независимы, а слабо взаимодействуют. Могут существовать различные формы взаимодействия, или **связи**, между двумя осцилляторами. Пусть двое часов закреплены на общем подвесе, и предположим, что это не абсолютно жесткая балка (рис. 1.9), как это и было в первоначальном наблюдении Гюйгенса. Балка может изгибаться, или она может слегка вибрировать, двигаясь справа налево, это не очень важно.

Действительно важно только то, что движение каждого маятника передается через структуры подвеса к другому маятнику, и в результате часы «чувствуют» друг друга: они взаимодействуют через вибрацию общего подвеса. Эта вибрация может быть практически незаметна; для того, чтобы ее обнаружить и визуализировать, могут потребоваться высокоточные механические измерения. Тем не менее, несмотря на то, что вибрация очень слаба, она может изменить ритм обоих часов!

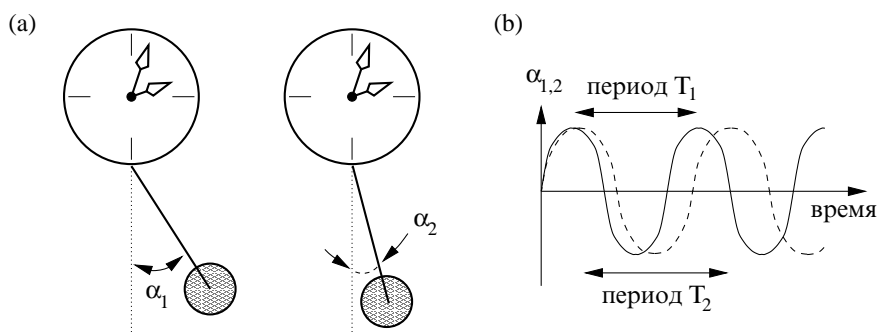


Рис. 1.8. Двое аналогичных маятниковых часов (а) не могут быть идеально идентичными; из-за мельчайшего разброса в параметрах они имеют слегка различные периоды (здесь  $T_2 > T_1$ ) (б). Следовательно, если мы взглянем на них в некий произвольный момент времени, то вообще говоря обнаружим маятники в различных положениях:  $\alpha_1 \neq \alpha_2$ .

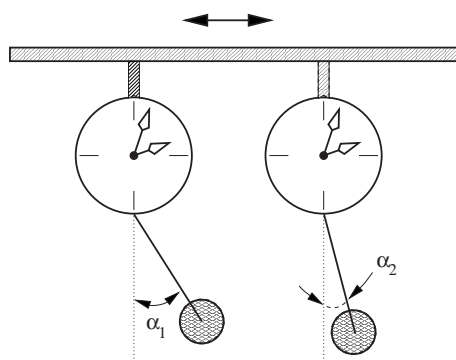


Рис. 1.9. Двое маятниковых часов, связанных через общий подвес. Балка, к которой подвешены часы, не жесткая, а может слегка вибрировать, как показано стрелками вверх рисунка. Эта вибрация вызывается движением обоих маятников, в результате чего двое часов «чувствуют» присутствие друг друга.

### Подстройка ритмов: захват фаз и частот

Эксперименты показывают, что даже слабое взаимодействие может синхронизовать двое часов. Это значит, что двое неидентичных часов, которые, взятые по отдельности, имеют различные периоды, при наличии связи подстраивают свои ритмы и начинают демонстрировать колебания с общим периодом. Это явление часто и называют в терминах совпадения частот их **захватом**:<sup>2</sup> если два неидентичных осциллятора имеющих свои собственные частоты  $f_1$  и  $f_2$  связываются, то они могут начать осциллировать с общей частотой. Произойдет это или нет, т.е. синхронизуются ли они, зависит от двух факторов.

#### 1. Сила связи

Этот параметр характеризует, насколько слабо или сильно взаимодействие. В эксперименте не всегда ясно, как измерить эту величину. В описанном выше эксперименте она сложным образом зависит от способности балки (подвеса) двигаться. Действительно, если балка абсолютно жесткая, то движение маятников не передается через опору, и, следовательно, часы не могут воздействовать друг на друга. Если часы не взаимодействуют, то сила связи равна нулю. Если балка не жесткая, а может сгибаться или продольно вибрировать, то имеет место взаимодействие.

#### 2. Расстройка по частоте

**Расстройка частот**  $\Delta f = f_1 - f_2$  характеризует, насколько различны осцилляторы. В противоположность силе связи, в экспериментах с часами расстройка может быть легко измерена или изменена. Действительно, частоту часов можно подстроить, меняя длину маятника.<sup>3</sup> Используя это, мы можем выяснить, как результат взаимодействия (т.е. возникновение синхронизации часов) зависит от расстройки частот. Представим себе следующий эксперимент. Сначала поместим часы в разные комнаты и измерим их частоты  $f_1$  и  $f_2$ . Сделав это, поместим часы на общий подвес и измерим частоты  $F_1$  и  $F_2$  *связанных* систем (часов). Мы можем выполнить такие измерения для различных параметров расстройки и получить зависимость  $\Delta F = F_1 - F_2$  от  $\Delta f$ . Нарисовав эту зависимость, мы получим кривую, показанную на рис. 1.10. Она *типична для взаимодей-*

<sup>2</sup> В английском этому соответствуют слова «entrainment» и «locking» (см. терминологические замечания в разделе 1.3.1).

<sup>3</sup> Механические часы обычно имеют механизм, позволяющий это делать. Такая подстройка используется для того, чтобы ускорить часы, если они отстают, или замедлить их, если они спешат.



ствующих автоколебательных систем, независимо от их природы (механической, химической, электронной, и т.д.). Проанализировав эту кривую, мы видим, что, если рассогласованность автономных систем не очень велика, то частоты двух часов (двух систем) становятся равными, или **захваченными**, т.е. наступает синхронизация. Подчеркнем, что частоты  $f_{1,2}$  и  $F_{1,2}$  должны измеряться для одного и того же объекта, но в разных экспериментальных условиях:  $f_{1,2}$  характеризуют свободные (несвязанные, или автономные) осцилляторы, в то время как частоты  $F_{1,2}$  получены в присутствии связи. В общем случае мы ожидаем, что ширина области синхронизации возрастает с увеличением силы связи.

Более детальное рассмотрение синхронных состояний показывает, что синхронизация двух часов может возникнуть в различных формах. Может случиться, что два маятника качаются сходным образом: например, они оба движутся налево, почти одновременно достигают крайнего левого положения и начинают двигаться направо, почти одновременно пересекают вертикаль, и так далее. В этом случае положения маятников изменяются во времени как показано на рис. 1.11а. Также возможна ситуация, при которой оба маятника всегда движутся в противоположных направлениях: когда первый маятник достигает, скажем, крайнего левого положения, второй достигает крайнего правого; когда они пересекают вертикаль, они движутся в противоположных направлениях (рис. 1.11б). Чтобы описать эти два явно различных режима, введем ключевое понятие теории синхронизации, а именно понятие **фазы** осциллятора.

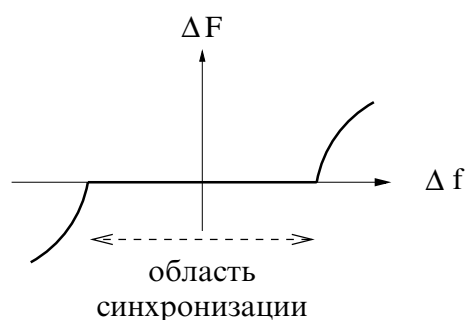


Рис. 1.10. График «разность наблюдаемых частот – расстройка» для некоторой фиксированной силы связи. Разность частот  $\Delta F$  двух связанных осцилляторов изображена как функция расстройки (рассогласования частот)  $\Delta f$  несвязанных систем. В определенном диапазоне расстроек частоты связанных осцилляторов идентичны ( $\Delta F = 0$ ), что указывает на синхронизацию.

Мы понимаем фазу как величину, которая пропорциональна доле периода и возрастает на  $2\pi$  в течение одного цикла колебаний

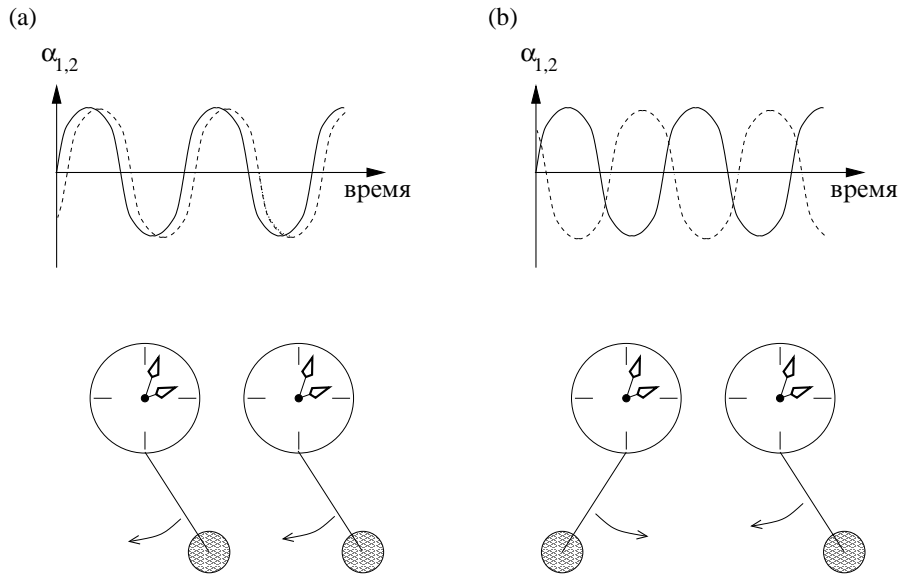


Рис. 1.11. Возможные синхронные режимы двух почти идентичных осцилляторов: они могут быть синхронизованы почти в фазе (а), т.е. с разностью фаз  $\phi_2 - \phi_1 \approx 0$ , или в противофазе (б), когда  $\phi_2 - \phi_1 \approx \pi$ .

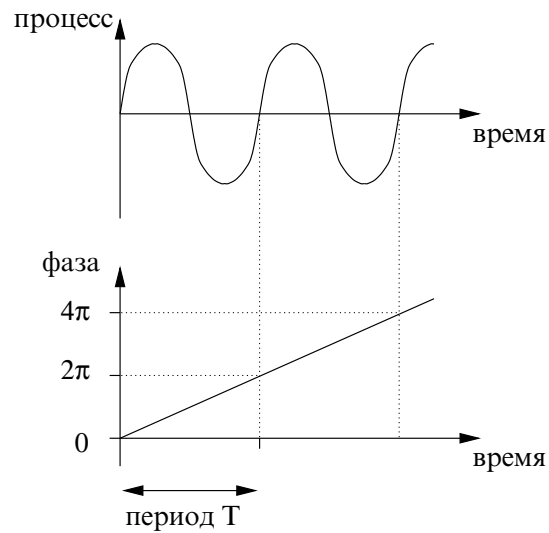


Рис. 1.12. Определение фазы. Фаза периодического колебания растет равномерно во времени и увеличивается на  $2\pi$  с каждым периодом.

(рис. 1.12). Фаза однозначно определяет состояние периодического осциллятора; как и время, она параметризует сигнал внутри одного цикла. На первый взгляд, фаза не дает новой информации о системе, но ее преимущества становятся очевидными, если мы рассмотрим разность фаз<sup>4</sup> двух часов. Это дает возможность различить два разных синхронных режима.

Если два маятника движутся в одном направлении и почти одновременно достигают, скажем, крайнего правого положения, то их фазы  $\phi_1$  и  $\phi_2$  близки и такой режим называется **синфазной синхронизацией** (рис. 1.11а). Если мы взглянем на движение маятников с большей точностью (вполне вероятно, что для этого нам понадобится довольно сложное оборудование), то мы сможем выявить, что эти движения не в точности одновременны. Часы, которые изначально шли чуть быстрее, оказываются немного впереди других, так что обычно говорят о **фазовом сдвиге** между двумя колебаниями. Этот фазовый сдвиг может быть очень мал, в случае двух часов он может быть невидим невооруженным глазом, но он всегда присутствует, если две системы изначально имели разные периоды колебаний, или же разные частоты.

Если маятники двух синхронизованных часов движутся в противоположных направлениях, то говорят о синхронизации в **противофазе** (рис. 1.11b). Именно такое синхронное состояние наблюдал и описал Христиаан Гюйгенс. Недавнее повторение этого эксперимента, выполненное И. И. Блехманом с сотрудниками, а также теоретические исследования показывают, что возможны как син- так и противофазные синхронные режимы [Блехман 1981], в зависимости от того, как связаны между собой часы (см. детали в разделе 4.1.1). Опять-таки, колебания двух маятников сдвинуты не точно на половину периода – они не в точности в противофазе, а существует дополнительный малый фазовый сдвиг.

Возникновение определенного соотношения между фазами двух синхронизованных автоколебательных систем часто называют **захватом фаз**. Здесь мы описали его простейшую форму; в следующих главах мы рассмотрим более общий случай.

Наш мысленный эксперимент с часами демонстрирует основной

<sup>4</sup> Фазу можно ввести двумя различными, хотя и связанными способами. Можно считать, что она сбрасывается в ноль в начале каждого цикла, и тем самым рассматривать ее на интервале от 0 до  $2\pi$ ; альтернативно, можно все время суммировать набег фазы и, следовательно, считать, что она растет до бесконечности. Эти два определения почти эквивалентны, поскольку обычно важна только разность фаз.

признак синхронизации: будучи связанными, два осциллятора с изначально различными частотами и независимыми фазами подстраивают свои ритмы и начинают осциллировать на общей частоте; это также предполагает наличие определенного соотношения между фазами двух систем. Мы хотим подчеркнуть, что это *точное равенство* частот выполняется в некотором диапазоне изначальной расстройки по частоте (а не в одной точке, как было бы при случайном совпадении).

### 1.2.2 Что не является синхронизацией?

Только что сформулированное определение синхронизации содержит несколько ограничений. Подчеркнем эти ограничения, проиллюстрировав понятие синхронизации несколькими контрпримерами.

#### *Не бывает синхронизации без колебаний в автономной системе*

Чтобы получить незатухающие колебания маятника, поместим рядом электромагнит, питаемый переменным током с частотой  $f$ . Соответственно, на маятник действует переменная магнитная сила. Эти колебания заметны, только если частота магнитной силы  $f$  близка к собственной частоте  $f_0$ , иначе же они пренебрежимо малы; это хорошо известное явление резонанса. После некоторого переходного процесса маятник колеблется с частотой магнитного поля  $f$ . Если бы эта частота изменилась, то и частота колебаний маятника тоже бы изменилась. Кажется, что это и есть описанное выше явление захвата, но это не так! Этот случай не может быть назван синхронизацией, так как одна из двух взаимодействующих систем –

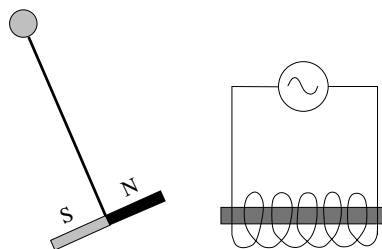


Рис. 1.13. Резонанс – это не синхронизация! Магнитный маятник колеблется в электромагнитном поле с частотой электрического тока. Это пример вынужденных колебаний системы, не имеющей собственного ритма: если маятник закрыт экраном от электромагнита, то колебания затухают.

маятник – не имеет собственного ритма. Если мы нарушим связь между системами, например, поместим металлическую пластину между электромагнитом и маятником, то после некоторого переходного процесса маятник остановится. Следовательно, в этом случае нельзя говорить о подстройке ритмов.

Прежде всего, мы хотим подчеркнуть разницу между синхронизацией и другим хорошо известным явлением в колебательных системах – резонансом. Для иллюстрации рассмотрим систему, которая немного похожа на часы, так как ее колебательный элемент – тоже маятник. Пусть этот маятник свободно вращается на горизонтальном валу и имеет магнит на свободном конце (рис. 1.13). Маятник – не автоколебательная система и не может осциллировать непрерывно: если его толкнуть, то он начнет качаться, но эти свободные колебания затухнут из-за сил трения. Частота  $f_0$  свободных колебаний определяется геометрией маятника и, при малых отклонениях, не зависит от амплитуды.

### *Синхронное изменение двух переменных – это не всегда синхронизация*

Наше понимание синхронизации предполагает, что наблюдаемый объект может быть разделен на несколько подсистем, которые могут, пусть и не в конкретном эксперименте, а, по крайней мере, в принципе, генерировать независимые сигналы. Таким образом мы исключаем случаи, когда две колебательные переменные являются просто двумя разными координатами одной и той же системы. Рассмотрим, например, скорость и смещение маятника часов; очевидно, что эти переменные осциллируют с общей частотой и определенным сдвигом фаз, но ведь и не может же быть скорости без смещения, и наоборот. Конечно, в таком тривиальном примере очевидно, что синхронизация здесь ни при чем, но в некоторых сложных случаях может быть совершенно неочевидно, к одной или к разным системам относятся наблюдаемые сигналы.

Проиллюстрируем это примером из динамики популяций. Изменение численности взаимодействующих видов – это широко известное в экологии явление; хорошим примером могут быть колебания в системе «зайцы – рыси» (рис. 1.14). Число животных-хищников и их жертв изменяется с одним и тем же периодом  $T \approx 10$  лет, так что можно сказать, что они изменяются синхронно, с некоторым сдвигом фаз. Этот график напоминает рис. 1.11, но тем не менее мы не можем в этом случае говорить о синхронизации, так как экологи-

ческая система не может быть разделена на два осциллятора. Если бы зайцы и рыси были бы изолированы друг от друга, то не было бы никаких колебаний вообще: хищники бы просто вымерли, а число жертв ограничивалось бы количеством доступной им пищи и другими факторами. Зайцы и рыси представляют собой два компонента одной неделимой системы. Так как мы не можем рассматривать их как две подсистемы с собственными ритмами, то мы и не можем говорить о синхронизации. Напротив, очень интересно рассмотреть возможность синхронизации (и она, действительно, есть) двух или многих популяций зайцы – рыси, заселяющих соседние регионы и слабо взаимодействующих между собой, например, за счет локальной миграции животных.

#### *Слишком сильная связь делает систему единой*

В заключение, мы объясним, что мы понимаем под слабой связью; для этого опять используем наш «виртуальный» эксперимент. Одновременно (можно также сказать «синхронно») мы еще раз проиллюстрируем разницу между терминами «синхронное движение» и «синхронизация». Возьмем опять двое часов и механически соединим их маятники жесткой связью (рис. 1.15). Очевидно, что часы или остановятся, или же их маятники будут двигаться синхронно. Мы бы не хотели называть этот тривиальный эффект синхронизацией:

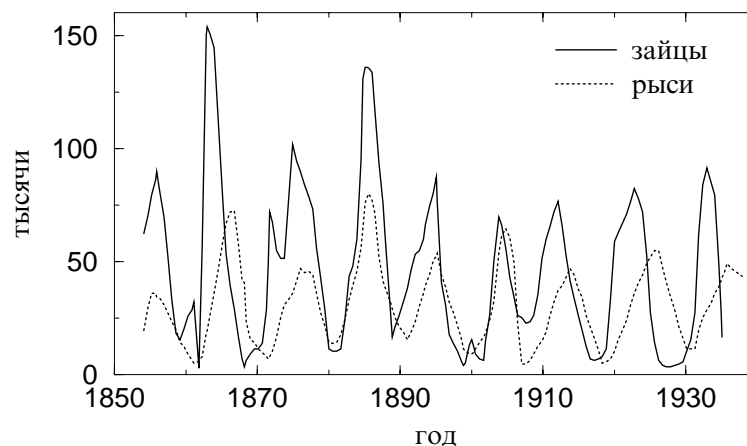


Рис. 1.14. Классический набор данных (взятый из [Odum 1953]) для системы хищник – жертва: записи канадской меховой компании Гудзонова залива о числе добытых рысей и зайцев более чем за столетие. Понятие синхронизации в данном случае неприменимо, т.к. рыси и зайцы представляют собой неделимую систему.

связь не слаба, она накладывает слишком сильные ограничения на движение двух систем, и, следовательно, естественно рассматривать всю систему как неделимую.

Итак, возможность разделения одной большой системы на несколько осциллирующих подсистем может зависеть от параметра. Обычно довольно сложно, если вообще возможно, строго определить, какую связь можно считать слабой, где лежит граница между слабым и сильным и, соответственно, должны ли мы рассматривать проблему синхронизации или же изучать новую, единую, систему. В довольно расплывчатой формулировке мы можем сказать, что введение связи не должно качественно изменять поведение каждой из взаимодействующих систем и не должно лишать систему ее индивидуальности. В частности, если одна система перестает осциллировать, то это не должно мешать второй системе поддерживать ее собственный ритм.

Подводя итоги, скажем, что, если в каком-либо эксперименте мы наблюдаем две переменные, которые кажутся изменяющимися синхронно, то это не обязательно означает, что мы наблюдаем синхронизацию. Чтобы назвать явление синхронизацией, мы должны быть уверены в том, что:

- мы анализируем поведение двух автоколебательных систем, т.е. систем, способных генерировать собственные ритмы;
- системы подстраивают свои ритмы за счет слабого взаимодействия;
- подстройка ритмов происходит в некотором диапазоне расстройек между системами; в частности, если частота одного из ос-

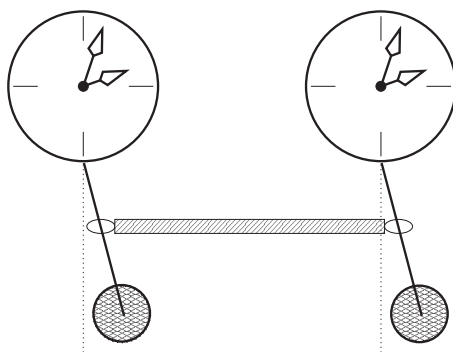


Рис. 1.15. Пример того, что *не может* быть рассмотрено как слабая связь.

цилляторов медленно изменяется, то вторая система следует за этим изменением.

Соответственно, одного наблюдения недостаточно, чтобы сделать вывод о наличии синхронизации. Синхронизация – это **сложный динамический процесс, а не состояние**.

### 1.3 Синхронизация: обзор различных случаев

Мы уже упомянули много примеров коллективного поведения различных колебательных систем, от простых механических или электрических устройств до живых организмов. Теперь мы хотим перечислить различные формы синхронизации. При этом мы не будем обращать внимание ни на природу колебаний (т.е. генерируются ли они электронным устройством или живой клеткой), ни на природу связи (т.е. осуществляется ли она за счет механического соединения или диффузии реагентов химической реакции), а остановимся на общих свойствах: являются ли колебания периодическими или нерегулярными; является ли связь взаимной или однонаправленной и т.д. Это не будет полной и строгой классификацией, а просто кратким обсуждением основных проблем теории синхронизации, которые рассматриваются в данной книге.

Основной пример предыдущего раздела – двое взаимодействующих часов – иллюстрирует важный случай, который называется **взаимной синхронизацией** (см. также главы 4 и 8). Действительно, эти два объекта в равной степени воздействуют друг на друга и взаимно подстраивают свои ритмы. Может, однако, случиться, что осциллятор подвержен воздействию, которое совершенно не зависит от колебаний этого осциллятора. Мы начнем с рассмотрения такого случая, а затем перейдем к более сложным задачам.

#### *Синхронизация внешней силой (главы 3 и 7)*

Синхронизация была открыта Гюйгенсом как побочный результат его усилий по созданию высокоточных часов. В наши дни этот эффект используется для точного и недорогого измерения времени с помощью радиоуправляемых часов. В этом случае передаваемый по радио слабый сигнал от центральных высокоточных часов каждую минуту подстраивает ритм других часов, тем самым захватывая их



и делая излишним улучшение их качества. Подчеркнем существенную разницу между радиоуправляемыми часами и «вокзальными часами». Первые являются автоколебательной системой и поэтому способны показывать время (пусть и не очень точно) даже в отсутствие синхронизирующих радиосигналов. Вокзальные же часы, наоборот, – это обычная пассивная система, управляемая электрическим сигналом; они не будут функционировать, если сигнал исчезнет. Собственно говоря, вокзальные часы есть не что иное как одни (центральные) часы со многими удаленными циферблатами; следовательно, понятие синхронизации здесь неприменимо.

Похожая схема синхронизации была «реализована» природой для подстройки биологических часов, которые регулируют суточные (циркадные) и сезонные ритмы живых систем, от бактерии до человека. Для большинства людей внутренний период этих часов отличается от 24 часов, но он захватывается сигналами окружающей среды, например, освещенностью, имеющей период вращения Земли. Очевидно, что воздействие в этом случае – одностороннее: человечество не влияет на вращение планет (пока); таким образом, это еще один пример синхронизации внешней силой. В обычных условиях эта сила достаточно сильна, чтобы обеспечить идеальный захват; для того, чтобы десинхронизовать биологические часы, надо отправиться либо в полярные области, либо в пещеру. Интересно, что хотя обычно период активности человека в точности захвачен вращением Земли, фазовый сдвиг между внутренними часами и внешней силой изменяется от индивида к индивиду: некоторые люди относят себя к «жаворонкам», в то время как другие называют себя «совами». Возмущение привычного фазового сдвига сильно нарушает нормальную активность. Каждый день многие люди осуществляют подобный эксперимент, быстро меняя долготу места (например, пересекая Атлантику) и испытывая сбой суточного ритма. Им может потребоваться до нескольких дней для восстановления нужного фазового соотношения с внешней силой; на языке нелинейной динамики говорят о различной длине переходного процесса к устойчивому синхронному состоянию.

#### *Ансамбли осцилляторов и колебательные среды (главы 4, 11 и 12)*

Во многих естественных ситуациях взаимодействуют более двух объектов. Если два осциллятора способны к подстройке ритмов, то можно ожидать такой способности и от большого числа систем. Один

пример был уже упомянут в разделе 1.1: большая популяция светлячков может излучать вспышки света синхронно; такую систему мы называем ансамблем взаимно связанных осцилляторов. Очень похожее явление, самоорганизация аплодирующей публики, наблюдалось, вероятно, каждым из читателей этой книги, например, в театре. Действительно, если аудитория достаточно велика, то часто можно услышать довольно быстрый (несколько периодов колебаний) переход от шумовых к ритмическим, почти периодическим, аплодисментами. Это происходит, когда большинство публики аплодирует в унисон, т.е. синхронно.

Светлячок «общается» посредством световых импульсов со всеми остальными насекомыми в популяции, а человек в театре слышит всех остальных членов аудитории. В этом случае можно говорить о **глобальной** (каждый с каждым) связи. Бывают и другие ситуации, когда осцилляторы упорядочены в цепочки или решетки, где каждый элемент взаимодействует с несколькими соседями. Такие структуры типичны для созданных человеком систем, например, для решеток лазеров или цепочек контактов Джозефсона, но могут также встречаться и в природе. Так, гладкая мускулатура кишечника млекопитающих может быть с электрической точки зрения рассмотрена как цепочка слабо связанных пейсмекеров, имеющих свои собственные частоты. Их активность приводит к сокращению мускулатуры. Эксперименты показывают, что соседние источники активности часто подстраивают свои частоты и формируют синхронные кластеры.

Достаточно часто мы не можем выделить отдельный колебательный элемент внутри естественного объекта. Вместо этого мы должны рассматривать систему как непрерывную колебательную среду, как в случае химической реакции Белоусова – Жаботинского. Она может протекать, например, в тонкой мембране, зажатой, как слой бутерброда, между двумя резервуарами реагентов. Концентрации веществ изменяются локально, а коллективные колебания, имеющие общую частоту, могут интерпретироваться как синхронизация в среде.

### *Фазовая и полная синхронизация хаотических осцилляторов (главы 5, 10 и часть III)*

В наши дни широко известно, что автоколебательные системы, например, нелинейные электронные цепи, могут генерировать довольно сложные, **хаотические** сигналы. Многие естественные системы также демонстрируют сложное поведение. Недавние исследования

показывают, что при наличии связи такие системы также могут синхронизоваться. Конечно же, в этом случае нам необходимо уточнить понятие синхронизации, потому что совершенно не очевидно, как характеризовать ритм хаотического осциллятора. Здесь нам поможет то, что иногда хаотические сигналы относительно просты, как, например, показанный на рис. 1.16. Такой сигнал – «почти периодический»; мы можем считать, что он состоит из похожих циклов с изменяющейся амплитудой и периодом (который может быть грубо определен как интервал между соседними максимумами). Выбрав большой интервал времени  $\tau$ , мы можем сосчитать число циклов в этом интервале  $N_\tau$ , вычислить **среднюю частоту**

$$\langle f \rangle = \frac{N_\tau}{\tau}$$

и взять ее в качестве характеристики хаотического колебательного процесса.

С помощью средних частот мы можем описать коллективное поведение взаимодействующих хаотических систем точно так же, как и периодических. Если связь достаточно велика (например, для рези-

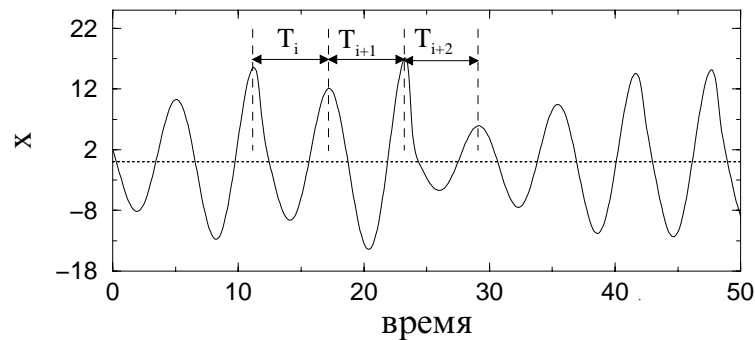


Рис. 1.16. Пример хаотических колебаний, полученных моделированием системы Рёсслера (она может рассматриваться в качестве модели обобщенной химической реакции) [Rössler 1976]. (Система Рёсслера, так же как и другие динамические модели, обсуждаемые в данной книге (например, модели Лоренца и Ван-дер-Поля), обычно записывается в безразмерном виде. Поэтому на рис. 1.15, 1.16 и многих других рисунках в книге как время, так и зависящая от него переменная безразмерны.) Интервал времени между соседними максимумами нерегулярно меняется от цикла к циклу,  $T_i \neq T_{i+1} \neq T_{i+2}$ , также как и высота максимумов (амплитуда). Хотя варибельность  $T_i$  в данном конкретном случае едва видна, в общем случае она может быть довольно большой; поэтому мы характеризуем ритм усредненной величиной – средней частотой.

ственно связанных электрических цепей это означает, что сопротивление должно быть достаточно мало), средние частоты двух осцилляторов становятся равными и может быть получена зависимость, как на рис. 1.10. Важно отметить, что совпадение средних частот не означает, что сигналы также совпадают. Оказывается, что слабая связь не оказывает влияния на хаотическую природу обоих осцилляторов; их амплитуды остаются нерегулярными и некоррелированными, в то время как частоты подстраиваются таким образом, что мы можем говорить о фазовом сдвиге между сигналами (см. рис. 1.17с и ср. его

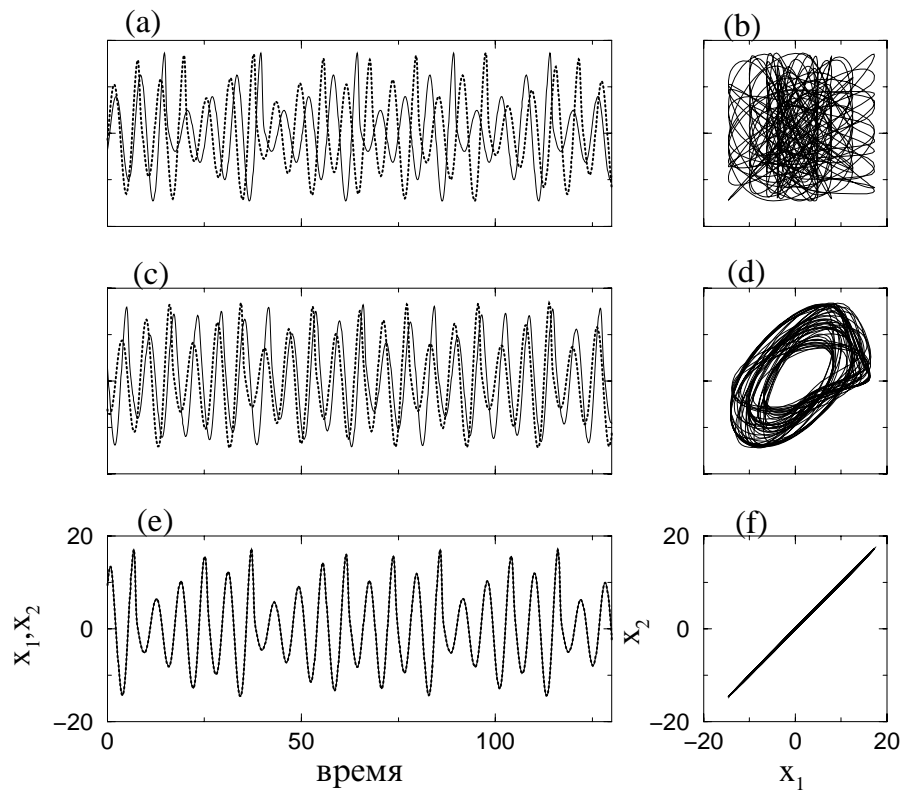


Рис. 1.17. На (а) показаны два хаотических сигнала  $x_1$ ,  $x_2$ , генерируемых несвязанными неидентичными системами. На изображенном интервале времени они имеют, соответственно, 21 и 22 максимума. Введение связи между осцилляторами подстраивает их частоты, хотя амплитуды остаются различными (с). Зависимость  $x_1$  от  $x_2$  (d) демонстрирует теперь кольцевую структуру, типичную для случая двух сигналов с одинаковыми частотами и постоянным фазовым сдвигом (ср. с (b), где никакой структуры не видно). Сильная связь делает сигналы почти идентичными ((e) и (f)).

с рис. 1.11a). Такой режим называется **фазовой синхронизацией хаотических систем**.

Очень сильная связь стремится сделать состояния обоих осцилляторов идентичными. Она влияет не только на средние частоты, но также и на хаотические амплитуды. В результате, сигналы совпадают (или почти совпадают) и наступает режим **полной синхронизации** (рис. 1.17e,f).

Явление синхронизации может также наблюдаться в больших ансамблях взаимно связанных хаотических систем и в сформированных ими пространственных структурах. Эти эффекты также обсуждаются в книге.

#### *Что еще есть в книге*

##### *Релаксационные осцилляторы (разделы 2.4.2, 3.3 и 8.3)*

Достаточно часто форма колебаний весьма далека от синусоидальной. Многие осцилляторы демонстрируют чередование эпох «молчания» и быстрой активности; примерами могут быть сокращения сердца и генерация потенциалов действия нейронами (спайкинг – от английского spiking). Такие системы называются **релаксационными осцилляторами**, и популярной моделью является **осциллятор «накопление – сброс»** (по-английски integrate-and-fire). Понимание синхронизации таких систем важно, например, в контексте исследования поведения ансамблей нейронов или в кардиологии (взаимодействие первичного и вторичного пейсмекеров сердца).

##### *Ротаторы (разделы 4.1.8 и 7.4)*

Механические системы с вращающимися элементами представляют особый класс объектов, способных к синхронизации. Электрическим аналогом ротаторов являются сверхпроводящие контакты Джозефсона. Синхронизация таких систем играет важную роль в инженерных приложениях.

##### *Шум (раздел 3.4, глава 9)*

Периодические осцилляторы – это идеализированные модели естественных систем. Реальные системы не могут считаться идеально изолированными от окружающей среды и, следовательно, всегда подвержены нерегулярным возмущениям. Кроме того, внутренние параметры осциллирующих объектов слегка изменяются, например из-за тепловых флуктуаций. Поэтому, чтобы оставаться близкими к реальности, мы должны изучать свойства синхронизации в присутствии шума.

*Выявление синхронизации по данным (глава 6)*

Отдельно стоящей проблемой является экспериментальное исследование осцилляторов, которые, возможно, связаны между собой. Весьма часто, особенно в биологических и геофизических приложениях, измеряемые сигналы имеют гораздо более сложную форму, чем периодическое движение маятника часов, и просто наблюдения может оказаться недостаточно: чтобы выявить синхронизацию, требуются специальные методы анализа данных. Более того, часто мы не имеем доступа к параметрам систем и связи, а можем только наблюдать колебания. Например, человеческий организм содержит несколько осцилляторов, таких как ритмически сокращающееся сердце и система дыхания. В отличие от описанного мысленного эксперимента с часами, подстраивать эти системы или связь между ними невозможно (или, по крайней мере, очень сложно). Единственный способ обнаружить взаимодействие – это анализировать колебания, зарегистрированные в естественных условиях.

## 1.3.1 Терминологические замечания

Представляется важным определить словарь теории синхронизации. Действительно, толкование таких основных терминов как *синхронизация* и *захват* различается в зависимости от специализации, индивидуальных точек зрения и вкуса исследователя. Чтобы избежать неоднозначности, мы обговорим здесь как *мы* понимаем эти термины.

Мы подчеркиваем, что мы не предлагаем какого-либо общего определения *синхронизации*, которое включало бы все эффекты во взаимодействующих колебательных системах. Мы понимаем синхронизацию как подстройку ритмов за счет взаимодействия, и мы уточняем это понятие в конкретных случаях, например, при рассмотрении зашумленных или хаотических осцилляторов. В общем случае мы не ограничиваем явление полным совпадением сигналов, как это иногда делается.

Мы не предполагаем различного значения английских терминов *locking* и *entrainment*; в качестве русского эквивалента мы используем слово *захват*. Подчеркнем, что мы понимаем захват фаз *не как равенство фаз*, а в более широком смысле, допуская также постоянный фазовый сдвиг и (малые) флуктуации разности фаз. Так, мы говорим, что фазы  $\phi_1$  и  $\phi_2$  захвачены в отношении  $n : m$ , если выполняется неравенство  $|n\phi_1 - m\phi_2| < \text{constant}$ .

При рассмотрении взаимодействия хаотических систем мы различаем несколько стадий синхронизации. В этом контексте термин *фазовая синхронизация* (*phase synchronization*) используется для обозначения такого состояния, при котором устанавливается только соотношение между фазами взаимодействующих систем, в то время как амплитуды остаются хаотическими и могут быть практически некоррелированными. Это состояние, как и в случае периодических колебаний, может быть описано в терминах захвата фаз и частот, и слова «фазовая синхронизация» используются лишь для того, чтобы отличить этот режим от *полной синхронизации*, когда хаотические процессы становятся идентичными. Последнее состояние называют также идентичной (*complete, full, identical*) синхронизацией.

Подчеркнем, что «осциллятор», если не сказано явно иначе, означает автоколебательную систему. (В английском используются прилагательные *self-sustained, self-oscillatory* или *autonomous*). Предельным циклом мы, в соответствии с основным объектом нашего интереса, называем только аттрактор автоколебательной системы, но не системы с периодически действующей силой.

## 1.4 Основная библиография

Здесь мы приводим ссылки лишь на некоторые книги и обзоры. Этот список, конечно, не полон, потому что описание явления синхронизации может быть найдено во многих монографиях и учебниках.

Единственные книги, целиком посвященные проблемам синхронизации, – это книги И. И. Блехмана [1971; 1981]; они в первую очередь рассматривают механические осцилляторы, в частности, маятниковые часы, системы с вращающимися элементами, технологическое оборудование, но также некоторые электронные и квантовые генераторы, химические и биологические системы.

Краткое и популярное введение в проблему может быть найдено в [Strogatz and Stewart 1993]. Введение в теорию синхронизации, иллюстрированное разнообразными биологическими примерами дано в [Winfree 1980; Гласс и Мэки 1988; Glass 2001].

Теория синхронизации автоколебательных систем гармонической силой в присутствии шума была разработана Р. Л. Стратоновичем [1963]. Влияние шума на взаимную синхронизацию двух осцилляторов, синхронизация силой с флуктуирующими параметрами и другие проблемы были описаны А. Н. Малаховым [1968].

Различные аспекты синхронизации исследованы в монографии П. С. Ланда [1980]: синхронизация автоколебательной системы внеш-

ней силой, взаимная синхронизация двух, трех и многих осцилляторов, влияние шума на синхронизацию и захват осциллятора узкополосным шумом, синхронизация релаксационных осцилляторов.

И. Курамото [Kuramoto 1984] разработал метод фазового приближения, который допускает универсальное описание слабо связанных осцилляторов. В его книге также приводятся описания синхронизации в больших ансамблях и синхронизации распределенных систем (сред). Некоторые аспекты синхронизации пространственно распределенных систем, формирование синхронных кластеров за счет влияния флуктуаций, синхронизация глобально (каждый с каждым) связанных осцилляторов обсуждены в монографиях [Романовский и др. 1975, 1984]; основное внимание в них уделено химическим и биологическим приложениям. Эффекты синхронизации в лазерах описаны в книге [Siegman 1986].

Синхронизации хаотических систем посвящены главы в книгах Неймарка и Ланда [1987] и Анищенко [1995]. Упомянем также сборник статей и обзоров [Schuster (ed.) 1999], а также специальные журнальные выпуски [Pecora (ed.) 1997; Kurths (ed.) 2000].

Мы предполагаем, что читатель второй и третьей частей этой книги знаком с основами нелинейной науки. Если это не так, то в качестве вводного чтения по теории колебаний и нелинейной динамике мы рекомендуем следующие книги: [Андронов и др. 1937; Теодорчик 1952; Боголюбов и Митропольский 1961; Хаяси 1964; Найфэ 1979; Guckenheimer and Holmes 1986; Бутенин и др. 1987; Рабинович и Трубецков 1989; Glendinning 1994; Strogatz 1994; Ланда 1996]. В частности, книги [Рабинович и Трубецков 1989; Ланда 1996] содержат главы, освещающие основные проблемы теории синхронизации.

Читатель, желающий больше узнать о хаотических колебаниях, имеет богатый выбор, от книг для первого чтения [Мун 1987; Peitgen *et al.* 1992; Tufillaro *et al.* 1992; Lorenz 1993; Hilborn 1994; Strogatz 1994; Baker and Gollub 1996; Кузнецов 2001] и до книг, рассчитанных на специалистов [Guckenheimer and Holmes 1986; Неймарк и Ланда 1987; Шустер 1988; Wiggins 1988; Devaney 1989; Wiggins 1990; Lichtenberg and Lieberman 1992; Ott 1992; Argyris *et al.* 1994; Alligood *et al.* 1997].



## Глава 2

# Основные понятия: автоколебательная система и ее фаза

В этой главе мы уточняем понятие автоколебательной системы, кратко обсужденное во введении. Мы показываем, что такие системы широко распространены в природе и технике, и вводим их универсальное описание в фазовом пространстве и их универсальный образ – предельный цикл. Далее мы обсуждаем понятие и свойства фазы – переменной, играющей первостепенную роль в объяснении явления синхронизации. В заключение, мы рассматриваем несколько простых примеров автоколебательных систем, а также контрпримеры. Таким образом мы проиллюстрируем те свойства автоколебаний, которые отличают их от вынужденных колебаний и колебаний в консервативных системах; в следующих главах мы покажем, что именно эти свойства объясняют возникновение синхронизации. Наше изложение не будет полным и систематическим введением в теорию автоколебаний: мы остановимся только на основных аспектах, важных для понимания синхронизации.

Понятие **автоколебательных систем** было введено А. А. Андроновым и А. А. Виттом [Андронов и др. 1937]. Хотя уже Рэлей различал самоподдерживаемые и вынужденные колебания и А. Пуанкаре ввел понятие **предельного цикла**, именно Андронов и Витт свели вместе строгие математические методы и физические идеи. Автоколебательные системы являются подмножеством более широкого класса **динамических систем**. Последнее понятие означает, что мы рассматриваем детерминированные движения, т.е., если мы

знаем состояние системы в некоторый момент времени, то мы можем однозначно предсказать ее состояние в будущем. Динамические системы – это идеализированные модели, которые не учитывают естественные флуктуации параметров системы и другие источники шума, неизбежного в объектах реального мира, а также квантовую неопределенность микроскопических систем. В 30-ых годах 20-го века были известны только периодические автоколебания. В наши дни широко известны также нерегулярные, **хаотические** автоколебательные системы; их рассмотрение мы отложим до главы 5.

## 2.1 Автоколебательные системы: математические модели естественных осцилляторов

### 2.1.1 Автоколебательные системы типичны в природе

Что общего у таких разных осцилляторов как генератор радиочастоты на электронной лампе, маятниковые часы, светлячок, испускающий импульсы света, сокращающееся сердце человека и многие другие системы? Основное универсальное свойство состоит в том, что все это – активные системы, и, если их изолировать от окружающей среды, то они будут продолжать генерировать колебания в своем собственном ритме. Этот ритм полностью определяется свойствами самой системы; он поддерживается благодаря внутреннему источнику энергии, который компенсирует *диссипацию* в системе. Такие осцилляторы называются *автономными* и описываются классом *нелинейных* моделей, известных в физике и нелинейной динамике как **автоколебательные** системы.<sup>1</sup>

Довольно часто мы можем проверить, является ли система автоколебательной, если мы изолируем ее от окружающей среды и убедимся, что она продолжает осциллировать. Так, можно изолировать светлячка (или сверчка) от других насекомых, поместив его в условия с постоянной температурой, освещенностью и т.д., и увидеть, что, даже в одиночестве, он все равно ритмически испускает

<sup>1</sup> В радиофизике, электро- и радиотехнике термин «генератор» традиционно используется как синоним автоколебательной системы. В дальнейшем, если не сказано явно иначе, мы используем слово «осциллятор» как короткую замену словам «автоколебательная система». См. также терминологические замечания в разделе 1.3.1.

вспышки (короткие звуки). Можно изолировать растение, животное или человека-добровольца и установить, что они по-прежнему демонстрируют ритмы суточной активности. Подобные эксперименты, проведенные многими исследователями после де Мэрана<sup>2</sup>, четко показали, что циркадные ритмы существуют и в отсутствие внешних возмущений суточной периодичности. Следовательно, эти ритмы генерируются активной автоколебательной системой – биологическими часами – и этим отличаются от другого процесса с той же периодичностью – приливных волн. Приливы вызваны суточными изменениями гравитационных сил из-за Луны. Хотя мы и не можем изолировать океан от этого воздействия, механизм возникновения приливных волн хорошо известен, и мы знаем, что океан – это не автоколебательная система; эти колебания исчезли бы в отсутствие периодической силы, т.е. если бы не было Луны.

Ниже мы без дальнейшего обсуждения будем рассматривать многие естественные ритмы, например, физиологические, как автоколебания. Основанием для этого является то, что системы, генерирующие эти ритмы, – непременно диссипативные, и, следовательно, продолжительные ритмические процессы в них могут поддерживаться только за счет некоторого источника энергии. Тогда, если ясно, что эти системы автономные, то мы делаем вывод, что они автоколебательные.

### 2.1.2 Геометрический образ периодических автоколебаний: предельный цикл

Универсальное явление автоколебаний допускает единое описание, которое мы вкратце излагаем ниже. Предположим, что мы наблюдаем осциллятор, генерирующий на выходе периодический процесс; обозначим значение этого процесса  $x(t)$ . В частности,  $x(t)$  может иметь смысл углового отклонения маятника часов, или электрического тока через сопротивление генератора на электронной лампе, или интенсивности света в лазерах, или любой другой колебательной величины. Предположим, что мы хотим описать состояние осциллятора в некоторый момент времени. Знания  $x$  для этого недостаточно: действительно, для того же  $x$  процесс может как возрастать, так и убывать. Следовательно, чтобы однозначно определить состояние

<sup>2</sup> См. историческое введение в разделе 1.1.

системы, нам необходимо большее число переменных.<sup>3</sup> Довольно часто двух переменных,  $x$  и  $y$ , бывает достаточно, и мы ограничимся сейчас этим простейшим случаем. Для маятниковых часов этими переменными могут быть, например, угол отклонения маятника от вертикали и угловая скорость. Таким образом, поведение системы может быть полностью описано эволюцией во времени двух величин  $(x, y)$  (рис. 2.1). Эти переменные называются координатами в **фазовом пространстве** (пространстве состояний) и зависимость  $y(t)$  от  $x(t)$  называется *фазовым портретом* системы; точка с координатами  $(x, y)$  часто называется *фазовой точкой*. Если колебания периодические, т.е. они повторяются через период  $T$ ,  $x(t)$  соответствует *замкнутой кривой* на фазовой плоскости, называемой **предельным циклом** (рис. 2.2).

<sup>3</sup> Число необходимых переменных зависит от конкретной системы и называется ее размерностью.

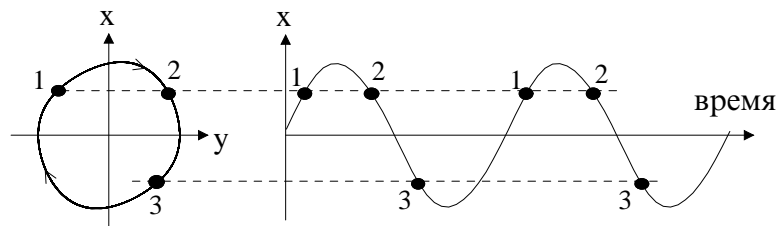


Рис. 2.1. Периодические колебания представлены замкнутой кривой в фазовом пространстве системы: эквивалентные состояния  $x(t)$  и  $x(t + T)$  (обозначенные цифрами на зависимости от времени) соответствуют одной и той же точке на этой кривой (обозначенной одной и той же цифрой). Наоборот, состояния с одинаковым  $x(t)$  различаются, если принять в рассмотрение вторую координату.

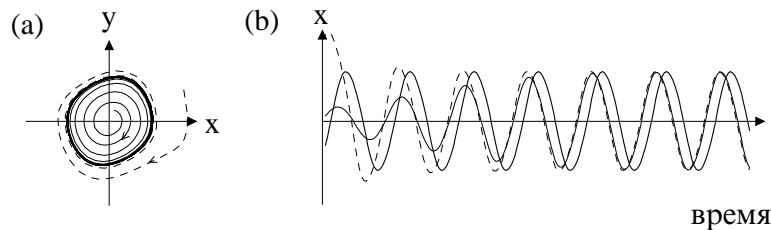


Рис. 2.2. (а) Замкнутая кривая (жирная линия) на фазовой плоскости притягивает все траектории из своей окрестности и поэтому называется **предельным циклом**. Те же траектории показаны в (б) как зависимости от времени.

Чтобы понять происхождение термина «предельный цикл», попробуем выявить, чем он отличается от всех других траекторий на фазовой плоскости. Для этой цели рассмотрим поведение траекторий в окрестности цикла. Другими словами, посмотрим, что произойдет, если точку столкнуть с предельного цикла. Для исходной физической (или механической, биологической и т.д.) системы это будет означать, что мы каким-либо образом возмущили ее периодическое движение. Мы пришли к важному свойству автоколебательных систем: после возмущения их колебаний они восстанавливают оригинальный ритм, т.е. фазовая точка возвращается на предельный цикл. Это свойство также означает, что автоколебания не зависят от начальных условий (по крайней мере, в некоторой области) или от того, как именно возникло движение в системе. В представлении на фазовой плоскости это соответствует тому, что мы изначально помещаем фазовую точку куда-нибудь на плоскость. Мы видим из рис. 2.2, что все траектории стремятся к циклу. Следовательно, после некоторого переходного процесса в системе устанавливаются стационарные колебания, соответствующие движению фазовой точки вдоль предельного цикла.<sup>4</sup>

Итак, причина, по которой мы выделяем эту кривую из всех других, в том, что она притягивает фазовые траектории;<sup>5</sup> из-за этого свойства она называется **аттрактором** динамической системы. Предельный цикл – это простой аттрактор, в противоположность **странным (хаотическим) аттракторам**, которые встретятся нам далее.<sup>6</sup>

Подводя итоги, можно сказать, что автоколебания могут быть описаны с помощью их образа в фазовом пространстве – предельного цикла. Форма цикла, а, следовательно, и форма колебаний полно-

<sup>4</sup> Строго говоря, предельный цикл может быть не плоским, так что для описания периодических колебаний в общем случае необходимо фазовое пространство большей размерности. Тем не менее, весьма часто это пространство может быть сведено к фазовой плоскости, т.е. двух переменных достаточно. Анализ *переходного* поведения, например, возмущения движения по предельному циклу, может требовать многих или даже бесконечного числа переменных. Так как основные свойства автоколебаний могут быть адекватно проиллюстрированы в двумерном пространстве, то мы ограничимся здесь этим случаем.

<sup>5</sup> По крайней мере из некоторой окрестности.

<sup>6</sup> Система может иметь более одного аттрактора, каждый из которых имеет свою область притяжения, например, несколько предельных циклов или предельный цикл и устойчивое положение равновесия. Разные области притяжения разделены отталкивающими множествами (кривыми или поверхностями) – *репеллерами*.

стью определяется внутренними параметрами системы. Если колебания близки по форме к синусоиде, то такой осциллятор называют *квазилинейным* (квазигармоническим). В этом случае предельный цикл может быть представлен окружностью. Сильнонелинейные системы демонстрируют колебания сложной формы; в дальнейшем мы рассмотрим соответствующие примеры.

## 2.2 Фаза: определение и свойства

Понятие фазы играет ключевую роль в теории синхронизации, поэтому мы хотим детально его обсудить. Мы начинаем с простого случая квазилинейных осцилляторов, для которых понятие фазы (и амплитуды) может быть легко проиллюстрировано. Этот пример объясняет основные свойства фазы, независимые от формы предельного цикла. Мы завершаем этот раздел демонстрацией того, как фаза может быть определена для произвольного цикла.

### 2.2.1 Фаза и амплитуда квазилинейного осциллятора

Предельный цикл квазилинейного осциллятора близок к окружности, а сами колебания могут считаться синусоидальными,  $x(t) = A \sin(\omega_0 t + \phi_0)$ . Здесь  $\omega_0$  означает *угловую частоту*, которая соотносится с периодом колебаний как  $\omega_0 = 2\pi/T$ ; ее следует отличать от частоты колебаний  $f_0 = 1/T$ . Интенсивность колебаний определяется их **амплитудой**  $A$ , а величина  $\phi(t) = \omega_0 t + \phi_0$  называется **фазой** (см. рис. 1.12).

Прежде всего мы хотим подчеркнуть, что термин «фаза» имеет в физике и нелинейной динамике несколько значений. Так, например, мы уже встречались с понятием «фазового пространства». Координаты в этом пространстве часто обозначают «фазовой точкой», и эволюция системы во времени описывается движением этой точки. Здесь, также как и в выражении «фазовый переход», значение слова «фаза» абсолютно отличается от того, что мы понимаем под словами «фаза колебаний». Мы надеемся, что в этой книге точный смысл будет всегда понятен из контекста.

Фаза колебаний  $\phi(t)$  нарастает без ограничения, но, так как синус – периодическая функция,  $\sin \phi = \sin(\phi + 2\pi)$ , то две фазы, отличающиеся на  $2\pi$ , соответствуют одному и тому же физическому состоянию. Иногда для удобства мы рассматриваем циклическую

фазу, определенную на окружности, т.е. изменяющуюся от 0 до  $2\pi$ ; мы используем те же обозначения для обоих случаев и надеемся, что это не затруднит понимания.

Мы еще не обсудили член  $\phi_0$ , который можно считать *начальной фазой*. Мы уже знаем, что, когда автоколебательная система «включается», после некоторого переходного процесса она выходит на предельный цикл независимо от своего начального состояния. Это означает, что амплитуда колебаний не зависит от начальных условий. Начальная же фаза  $\phi_0$ , наоборот, зависит от перехода к окончательному состоянию, и может быть произвольной, т.е. все значения  $\phi_0$  эквивалентны. Действительно, если мы будем рассматривать только установившиеся, стационарные, колебания, то мы всегда можем изменить начальную фазу, выбрав какую-либо другую точку отсчета времени  $t = 0$  для наблюдений.

Понятия фазы и амплитуды могут быть легко интерпретированы, если мы воспользуемся изображением предельного цикла на рис. 2.3а; они есть не что иное как полярные координаты точки на фазовой плоскости.<sup>7</sup> Эта точка вращается, например, против часовой стрелки с угловой скоростью  $\omega_0$ , так что за один период  $T$  колебаний она совершает один оборот и фаза  $\phi(t)$  возрастает на  $2\pi$ .

<sup>7</sup> Напомним, что предельный цикл квазилинейного осциллятора близок к окружности.

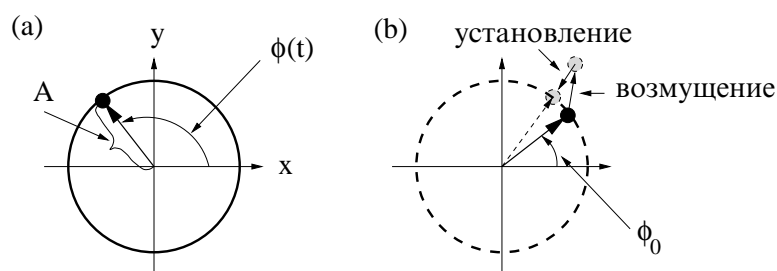


Рис. 2.3. (а) Стационарные автоколебания описываются вращением фазовой точки по предельному циклу. Полярные координаты этой точки соответствуют фазе  $\phi(t)$  и амплитуде  $A$  колебаний. (б) Во вращающейся системе координат стационарным колебаниям соответствует покоящаяся точка, показанная черным кружком. Если отклонить точку от предельного цикла, то возмущения амплитуды затухают, в то время как возмущения фазы остаются; возмущенное состояние и состояние после затухания возмущения показаны серыми кружками.

## 2.2.2 Амплитуда устойчива, фаза свободна

Приступим к обсуждению важнейшего вопроса об устойчивости фазовой точки на предельном цикле. Другими словами, нас интересует, что будет с колебаниями, если мы слегка возмутим движение.

Для удобства будем теперь анализировать поведение осциллятора в системе координат, вращающейся против часовой стрелки с такой же угловой скоростью  $\omega_0$ , что и фазовая точка в исходных координатах. С точки зрения наблюдателя в новой системе отсчета фазовая точка остается неподвижной, т.е. стационарные колебания соответствуют покоящейся точке, имеющей координаты  $\phi(t) - \omega_0 t = \phi_0$  и  $A$  (рис. 2.3b).

Предположим теперь, что колебания возмущены. Мы можем описать это смещением точки с предельного цикла (рис. 2.3b). Как будет эволюционировать такое возмущение? Как мы уже знаем, возмуще-

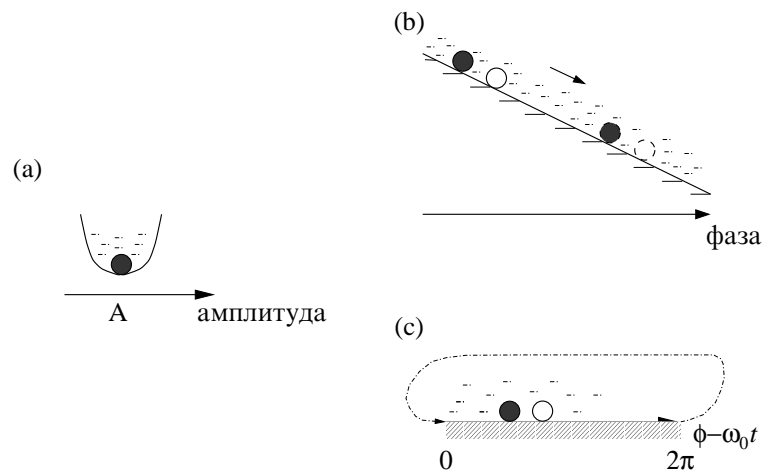


Рис. 2.4. Устойчивость точки на предельном цикле, проиллюстрированная динамикой легкой частицы в вязкой жидкости. (a) В направлении, перпендикулярном к циклу, точка находится в состоянии устойчивого равновесия: возмущения амплитуды быстро затухают, стремясь к устойчивому значению  $A$ . (b) Возмущения вдоль цикла, т.е. по фазе, не возрастают и не убывают. Постоянный рост фазы может быть представлен скольжением частицы вниз по наклонной плоскости. Две такие частицы, соответствующие невозмущенной и возмущенной фазам (символы  $\bullet$  и  $\circ$ ), скользят с постоянной задержкой друг относительно друга. (c) Во вращающейся (со скоростью  $\omega_0$ ) системе отсчета фаза постоянна (см. также обсуждение в разделе 3.1). Это соответствует частице на горизонтальной плоскости, т.е. находящейся в состоянии безразличного равновесия. Пунктирная линия напоминает, что фаза — это  $2\pi$ -периодическая переменная.



ние амплитуды затухает (см. рис. 2.2b). Что касается фазы, то ее возмущение *не возрастает и не убывает*: действительно, т.к. все значения  $\phi_0$  эквивалентны, то, если начальная фаза была изменена с  $\phi_0$  на  $\phi_1$ , то она сохраняет это значение до тех пор, пока система не будет вновь подвергнута возмущению.

Проиллюстрируем устойчивость автоколебаний с помощью аналогии между движением фазовой точки и движением легкой частицы в вязкой среде. При действии силы на такую частицу она движется с постоянной скоростью. Если действие прекращается, то частица останавливается и сохраняет свое положение.<sup>8</sup> Динамика амплитуды может быть представлена частицей в U-образном потенциале (рис. 2.4a). Минимум потенциала соответствует амплитуде  $A$  невозмущенных колебаний, так что по отношению к радиальным возмущениям точка на предельном цикле находится в состоянии устойчивого равновесия.

Рассмотрим теперь изменение фазы, т.е. смещение только вдоль цикла. Какого-либо предпочтительного значения для фазы не существует, поэтому ее динамика может быть проиллюстрирована частицей на плоскости (рис. 2.4b,c). Такая частица находится в состоянии *безразличного равновесия*. Она остается в покое, пока возмущающая сила не передвинет ее в новое положение. Очень важно, что частица может быть сдвинута бесконечно малой силой, но, конечно, в этом случае и скорость будет бесконечно мала. Основное следствие этого факта состоит в том, что *фаза может быть очень легко подстроена внешним воздействием, и, в результате, осциллятор может быть синхронизован!*

### 2.2.3 Общий случай: предельный цикл произвольной формы

Обсудим теперь, как фаза может быть введена для предельного цикла произвольной, в общем случае некруглой формы (рис. 2.5). Предположим, что периодическое движение имеет период  $T$ . Начиная при  $t = t_0$  с произвольной точки на цикле, определим фазу как величину, пропорциональную доле периода

$$\phi(t) = \phi_0 + 2\pi \frac{t - t_0}{T}. \quad (2.1)$$

<sup>8</sup> Если масса частицы пренебрежимо мала, то постоянная сила вызывает постоянную скорость, а не постоянное ускорение. Такая динамика часто называется передемпфированной.

Тогда фаза монотонно возрастает при движении фазовой точки по траектории, и каждый оборот точки вокруг цикла соответствует

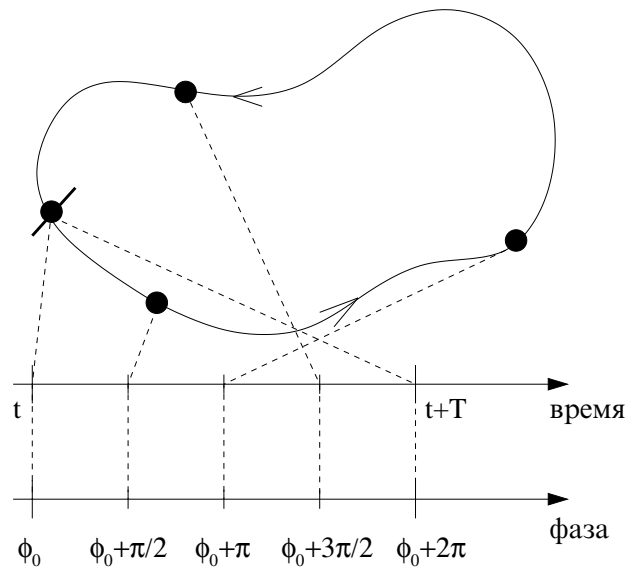


Рис. 2.5. Определение фазы автоколебательной системы с предельным циклом произвольной формы. Фаза параметризует движение точки вдоль цикла и может пониматься как доля периода колебаний  $T$ . Фаза – циклическая переменная: значения  $\phi$  и  $\phi + 2\pi k$  – эквивалентны. Начальная фаза  $\phi_0$  (показана отрезком жирной линии, перпендикулярным к циклу) может быть выбрана произвольно. Отметим, что движение точки вдоль цикла в общем случае неравномерно.

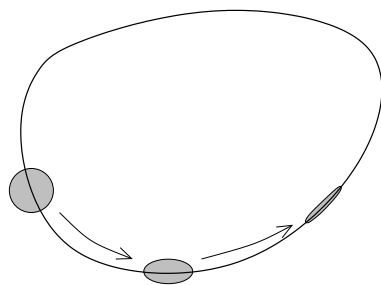


Рис. 2.6. Схождение и разбегание траекторий характеризуются ляпуновскими показателями. Предположим, что мы рассматриваем облако начальных условий вокруг некоторой точки на предельном цикле (серый круг). Этот фазовый объем уменьшается с эволюцией, приобретая эллиптическую форму. Это соответствует отрицательному ляпуновскому показателю в поперечном к циклу направлении и нулевому ляпуновскому показателю в касательном направлении.

приросту фазы  $2\pi$ . Под амплитудой можно понимать переменную, которая характеризует отклонения траектории в направлении, перпендикулярном к циклу. Подчеркнем, что движение точки вдоль цикла может быть неравномерным. Более того, может случиться, что интервалы относительно медленного движения перемежаются с быстрыми прыжками точки вдоль цикла. Системы с такими циклами называются *релаксационными осцилляторами*; они рассматриваются в разделе 2.4.2. Важно подчеркнуть, что, хотя движение точки по фазовой плоскости может быть неравномерным, рост фазы во времени всегда равномерен.

Особо отметим, что свойства, описанные нами для квазилинейного осциллятора, остаются справедливыми для любых периодических автоколебаний. Независимо от его формы, предельный цикл устойчив в поперечном направлении, в то время как в касательном направлении фазовая точка ни устойчива, ни неустойчива.

Если мы рассмотрим две траектории фазового пространства, одну невозмущенную и одну возмущенную, то мы увидим, что в радиальном направлении они сходятся, в то время как в направлении вдоль цикла они ни сходятся, ни расходятся. В терминах нелинейной динамики свойства сближения/разбегания близких траекторий характеризуются **показателем Ляпунова**. Сближение траекторий вдоль некоторого направления фазового пространства соответствует отрицательному ляпуновскому показателю (рис. 2.6). Абсолютное значение этого показателя характеризует скорость схождения. Аналогично, разбегание траекторий (мы столкнемся с этим свойством позже, при изучении хаотических осцилляторов в разделе 5.1) характеризуется положительным показателем. Наконец, нейтральное направление (нет сближения и нет разбегания) соответствует нулевому ляпуновскому показателю. Наиболее важный вывод, который используется при теоретическом рассмотрении в части II, состоит в том, что **фаза осциллятора может рассматриваться как переменная, соответствующая нулевому ляпуновскому показателю**.

### 2.3 Автоколебательная система: основные свойства

Автоколебания – это незатухающие устойчивые колебания в автономной диссипативной системе. В этом разделе мы сравниваем такие системы с консервативными, а также автоколебания с вынужден-

ными, и подчеркиваем различие между ними. Цель этого сравнения – продемонстрировать важность концепции автоколебаний для адекватного описания многих природных явлений, и синхронизации в частности. Мы также аргументируем, почему автоколебания возможны только в нелинейных системах.

### 2.3.1 Диссипация, устойчивость и нелинейность

#### *Диссипация*

Макроскопические естественные системы отдают свою энергию. Это происходит, например, из-за механического трения в подвесе маятника, из-за электрического сопротивления, или же из-за других механизмов необратимого преобразования энергии системы в тепло. Таким образом, исключая из рассмотрения примеры типа планетных систем (где диссипацией, по-видимому, можно пренебречь) или колебаний молекул (которые описываются законами квантовой механики), мы всегда должны учитывать, что без постоянного притока энергии в систему колебания затухнут. Следовательно, автоколебательные системы должны обладать *внутренним источником энергии*. В маятниковых часах колебания поддерживаются за счет потенциальной энергии поднятого груза или сжатой пружины. Современные часы, а также генератор на электронной лампе или другой электронный генератор черпают необходимую энергию из некоторого электрического источника питания. Ритмичное сокращение сердечной мышцы или излучение световых импульсов светлячками происходит за счет химических реакций в этих системах.

#### *Устойчивость*

Свойство устойчивости колебаний по отношению к возмущениям также отличает автоколебания от колебаний в консервативных системах. Периодические движения в консервативных системах могут быть описаны семейством замкнутых кривых на фазовой плоскости (рис. 2.7а). Действительно, в этих системах нет ни потери, ни восполнения энергии, поэтому если бы движение системы было бы изменено неким возмущением, то она осталась бы в возмущенном состоянии. Соответственно, измененное значение амплитуды будет сохранено. Другими словами, консервативная периодическая система не «забывает» начальные условия. Следовательно, периодические колебания в таких системах зависят от того, как именно было инициировано

движение.<sup>9</sup>

В качестве иллюстрации упомянем хорошо известную в динамике популяций модель Лотки–Вольтерра. Она была предложена для объяснения колебаний численности видов в системе хищник–жертва (пример колебаний числа зайцев и рысей показан на рис. 1.14). Эта нелинейная модель консервативна, и, следовательно, не может описать устойчивые колебания и синхронизацию нескольких взаимодействующих популяций. Это может быть сделано с помощью модифицированных моделей Лотки–Вольтерра, являющихся автоколебательными.

### Нелинейность

Нелинейность также существенна для поддержания устойчивых колебаний, описываемых предельным циклом. Устойчивость означает, что существуют только периодические движения с определенной амплитудой. Такое невозможно в моделях, описываемых линейными уравнениями: если решение  $x(t)$  линейной системы – периодическое, то для любого числа  $a$ ,  $a \cdot x(t)$  – тоже периодическое решение. Следовательно, линейная система, демонстрирующая периодические колебания, необходимо является консервативной (см. рис. 2.7а). Ли-

<sup>9</sup> На математическом языке, свойства диссипации и устойчивости описываются уменьшением начального фазового объема. Действительно, возьмем набор начальных условий, соответствующий облаку точек в фазовом пространстве. В диссипативной системе это облако сжимается с течением времени, и в конце концов становится точкой или линией (см. рис. 2.6). Консервативные системы сохраняют фазовый объем и поэтому они не могут иметь аттракторов.

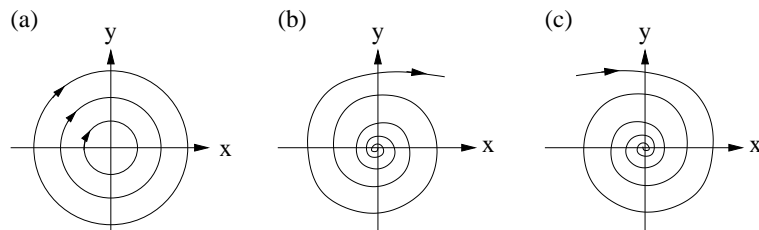


Рис. 2.7. (а) Периодическое движение в консервативной системе может быть представлено семейством замкнутых кривых (они описывают колебания с различными амплитудами и, вообще говоря, не обязательно имеют форму окружности). Фазовый портрет консервативной линейной системы выглядит как на (а); в диссипативной линейной системе возможны, наоборот, только неустойчивые (b) и устойчивые (c) движения.

нейные системы с диссипацией (или с источником энергии) допускают только бесконечно возрастающие или затухающие решения (рис. 2.7b,c), но не движения по предельному циклу.

Установление стационарных автоколебаний математически описывается как притяжение траектории к предельному циклу. Физически это притяжение может быть понято следующим образом. Каков бы ни был конкретный механизм диссипации и подачи энергии, энергия из некоторого источника, обычно неколебательного, преобразуется в колебательное движение. Обычно, чем больше амплитуда колебаний, тем больше потребление энергии от источника. С другой стороны, количество рассеянной энергии также зависит от амплитуды.<sup>10</sup> Эти зависимости определяют амплитуду стационарных колебаний, как показано на рис. 2.8. Если колебаний нет (амплитуда равна нулю), то нет ни потерь энергии, ни потребления энергии от источника; следовательно, обе функции должны проходить через начало координат. Пересечение этих двух кривых определяет амплитуду  $A$  стационарных колебаний. В этой точке поступление энергии в точности компенсирует ее потери. Отметим, что две кривые могут пересекаться таким образом и одновременно проходить через начало координат,

<sup>10</sup> Такое рассмотрение справедливо для систем с фазовым портретом типа показанного на рис. 2.2, где траектория по спирали приближается к предельному циклу, так что можно говорить о колебаниях с медленно меняющейся амплитудой.

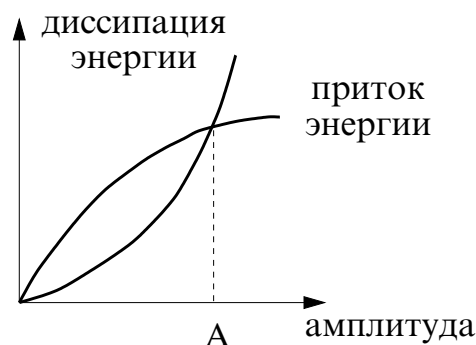


Рис. 2.8. Два противодействующих фактора – диссипация и потребление энергии от источника – определяют амплитуду  $A$  стационарных колебаний. В показанном здесь примере амплитуда устойчива: если она возрастет в результате некоторого возмущения, то диссипация начинает доминировать над притоком энергии, и это приводит к уменьшению амплитуды. Аналогично, случайное уменьшение амплитуды приводит к превышению притока энергии над ее потерей, и, следовательно, исходное значение амплитуды  $A$  восстанавливается.

только в том случае, если система *нелинейна*, т.е. описывается нелинейными дифференциальными уравнениями.

### 2.3.2 Автономные системы и системы под действием силы: фаза вынужденных колебаний не свободна!

В этом разделе мы хотим еще раз подчеркнуть различие между автоколебаниями и вынужденными колебаниями. Как автоколебания маятниковых часов (рис. 1.7), так и вынужденные колебания маятника (рис. 1.13) описываются замкнутой кривой в фазовом пространстве, которая притягивает траектории из своей окрестности. Тем не менее, эти кривые имеют важное различие: **фаза на предельном цикле свободна, в то время как фаза на устойчивой замкнутой кривой, соответствующей вынужденным колебаниям, однозначно определяется фазой внешней силы.** Как мы покажем в следующих главах, это решающее различие объясняет тот факт, что автоколебания могут быть синхронизованы, а вынужденные колебания – нет. Это различие можно продемонстрировать, возмущив систему (см. рис. 2.9). Поэтому в дальнейшем, когда мы говорим «осциллятор с предельным циклом», то мы неявно имеем в виду автономную, автоколебательную систему.

В качестве наглядного примера, рассмотрим всем знакомую систему – качели (рис. 2.10а). Алгоритм – как заставить их двигаться – известен каждому: после того, как качели каким-либо образом отклонены от положения равновесия, человек должен приседать, когда они приближаются к одной из точек максимального отклонения, и привставать, когда они проходят через вертикаль. Перемещая свой центр тяжести, человек накачивает энергию в систему; эта энергия компенсирует потери из-за сил трения и, в результате, поддерживает стационарные колебания. Ясно, что источником энергии в данном случае является мышечная энергия, колебательным элементом – маятник переменной длины, а обратная связь осуществляется человеком, который перемещает центр тяжести (и, следовательно, изменяет длину маятника) в подходящий момент времени. Наиболее важно здесь то, что эти движения осуществляются не в соответствии с каким-либо заданным периодическим ритмом, а в соответствии с положением качелей. (Действительно, период свободных колебаний маятника изменяется с амплитудой, и, следовательно, период движений человека также должен изменяться с амплитудой.) Это свойство и

определяет автоколебательный характер системы и ее существенное отличие от «механических качелей» (рис. 2.10b), которые могут рассматриваться как система, совершающая *вынужденные* колебания [Landa and Rosenblum 1993]. Предположим, что механические качели имеют устройство, которое периодически изменяет длину каната. Тогда, если качели хотя бы слегка отклонились от вертикали, то

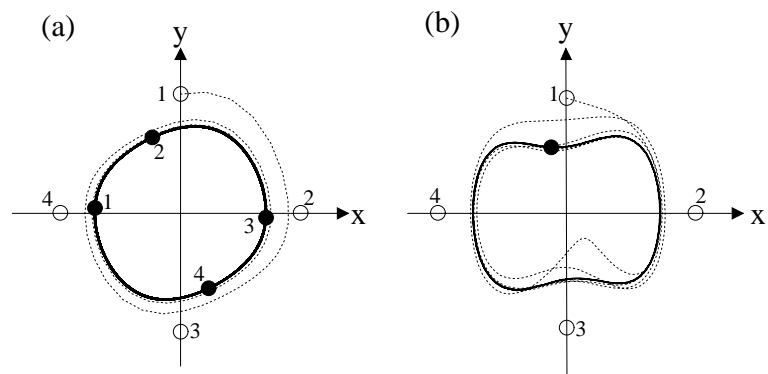


Рис. 2.9. Фаза автоколебаний свободна (а), а фаза системы, совершающей вынужденные колебания, – нет (b). Точка смещена с притягивающей траектории (жирная линия); четыре различных возмущенных состояния показаны символами  $\circ$ . Через некоторое время точки возвращаются на аттрактор (символы  $\bullet$ ). В (а) начальные и соответствующие конечные состояния показаны одними и теми же цифрами; в (b) конечные состояния совпадают; одна из траекторий показана пунктиром. В автоколебательной системе фаза «помнит» начальные условия, и поэтому может быть произвольной. При вынужденных колебаниях, наоборот, фаза стремится к некоторому значению, определяемому внешней силой, и не зависит от начальных условий.

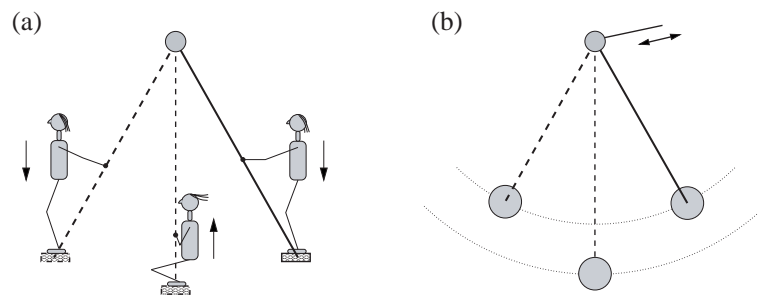


Рис. 2.10. (а) Человек на качелях – это автоколебательная система. (b) Механические качели, длина которых может меняться в соответствии с заданной функцией времени, – это пример системы, совершающей вынужденные колебания.



возникают колебания большой амплитуды (это хорошо известный эффект параметрического возбуждения). При этом маятник находится в вертикальном положении, когда канат имеет минимальную длину, и максимально отклонен, когда канат имеет максимальную длину. На первый взгляд обе системы – автоколебательные и вынуждаемые качели – кажутся весьма схожими. Обе системы демонстрируют возбуждение колебаний, однако между ними есть существенное различие. Это различие можно увидеть, если возмутить движение системы, например, подтолкнуть или притормозить маятники, и пронаблюдать за их положениями через достаточно большое время. Мы увидим, что маятник механических качелей находится в том же положении, в котором он был бы в отсутствие возмущения, в то время как автоколебательные качели могут быть найдены в произвольном положении, зависящем от возмущения (ср. с рис. 2.9). Другими словами, фаза обычных качелей свободна, а фаза механических качелей определяется фазой внешней силы. Поэтому, хотя колебания обеих систем описываются замкнутой кривой на фазовой плоскости,<sup>11</sup> мы используем термин «пределный цикл» только в контексте описания автоколебательных систем, таких, как обычные качели со стоящим человеком.

Ниже мы покажем, что именно это свойство фазы – быть свободной – и определяет способность автоколебательных систем к синхронизации. Сравнение двух качелей иллюстрирует важность понятия автоколебаний. Правильно определив механизм возникновения колебаний, мы можем предсказать, возможна синхронизация или нет. Так, двое автоколебательных качелей, подвешенных к общей балке, т.е. слабо связанных, могут синхронизоваться, если их параметры близки. Напротив, качели, раскачиваемые периодическими силами, не синхронизируются.

## 2.4 Автоколебательные системы: дополнительные примеры и обсуждение

Этот раздел содержит расширенное обсуждение автоколебательных систем. Он может быть пропущен читателем, знакомым с этой темой. С другой стороны, в последующих главах мы будем использовать

<sup>11</sup> Точнее говоря, замкнутая кривая вынуждаемой системы есть подходящая проекция трехмерного фазового пространства этой системы, где время является третьей координатой.

модели, описанные в разделе 2.4.2, так что может оказаться необходимым вернуться к этому разделу позже.

### 2.4.1 Типичная автоколебательная система с контуром обратной связи

Электронные генераторы являются традиционным объектом исследования явления синхронизации. Более того, именно возникновение радиосвязи и электроники стимулировало бурное развитие в изучении синхронизации. Здесь мы рассмотрим систему, состоящую из усилителя, динамика и микрофона (рис. 2.11). Широко известно, что если поднести микрофон близко к динамику, то в системе могут возбудиться автоколебания, которые проявляются громким звуком определенной частоты. Эта система содержит все компоненты, присущие электронным генераторам: усилитель, колебательный контур, цепь обратной связи и источник энергии. Произвольный малый шум, зарегистрированный микрофоном, усиливается и передается динамиком, возвращается на вход усилителя через микрофон и усиливается снова. Этот процесс продолжается, пока из-за нелинейности усилителя не наступит насыщение.

Внутренний контур обратной связи и другие типичные компоненты автоколебательной системы не всегда могут быть легко идентифицированы в конкретной системе. Некоторые неделимые физические подсистемы совмещают, например функции, усилителя и осциллятора. Тем не менее, механизмы автоколебаний универсальны и одинаковы для столь различных систем как электронные генера-

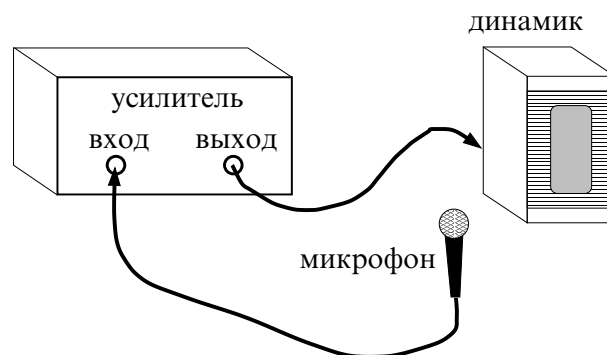


Рис. 2.11. Усилитель, динамик и микрофон составляют автоколебательную систему. Если микрофон находится близко к динамику, т.е. обратная связь достаточно сильна, то малейшее возмущение может привести к нежелательному возбуждению автоколебаний.

торы и клеточные биологические часы, генерирующие циркадные ритмы. Недавно было установлено, что эти часы также имеют цепь обратной связи в которой ритмическая экспрессия генов *Clock* приводит к колебаниям концентрации рибонуклеиновой кислоты и белков [Andreatic *et al.* 1999; Glossop *et al.* 1999; Moore 1999]. Контур обратной связи является необходимым элементом систем управления. Наличие в этом контуре временного запаздывания часто приводит к возбуждению автоколебаний. Многочисленные интересные примеры таких колебаний в физиологических и биологических примерах могут быть найдены в книгах [Winfree 1980; Гласс и Мэки 1988].

### 2.4.2 Релаксационные автоколебательные системы

В этом разделе мы знакомим читателя с особым классом автоколебательных систем, которые, начиная с ранних работ Ван-дер-Поля [van der Pol 1926], известны как **релаксационные автоколебательные системы**. Существенной особенностью таких систем является наличие двух масштабов времени: в каждом цикле колебаний есть интервалы медленного и быстрого движений. Форма таких колебаний поэтому очень далека от синусоидальной; она скорее напоминает последовательность импульсов.<sup>12</sup>

<sup>12</sup> Отметим, что иногда форма колебаний может меняться с изменением параметров осциллятора, так что один и тот же генератор может быть релаксационным или квазилинейным, в зависимости, например, от сопротивления в контуре.

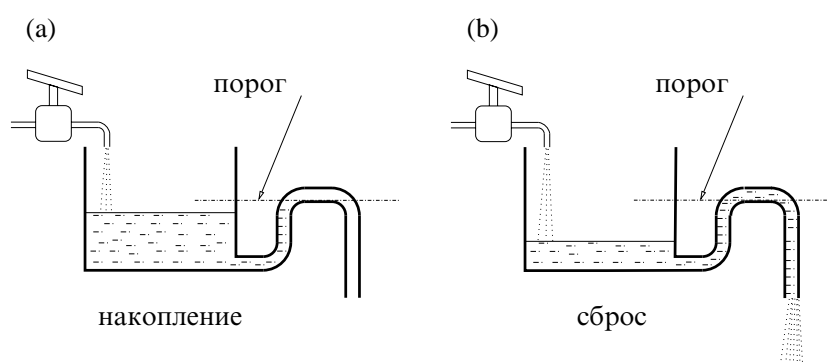


Рис. 2.12. Механическая модель релаксационного осциллятора накопление – сброс. (а) Вода медленно наполняет сосуд, пока ее уровень не достигнет порогового; эта часть колебательного цикла может быть обозначена как «накопление». (б) Вода вытекает через сифон и ее уровень в сосуде быстро понижается: осциллятор «стреляет».

Мы начнем наше рассмотрение релаксационных автоколебаний с простейшей механической модели [Пановко и Губанова 1964], схема которой показана на рис. 2.12. Основной элемент этой системы – сосуд, медленно заполняемый водой. Когда уровень воды достигает порогового значения, сосуд быстро опорожняется, и начинается новый цикл колебаний; энергия насоса, обеспечивающего постоянную подачу воды, преобразуется в колебания уровня воды в сосуде. Так как в течение каждого периода колебаний вода медленно накапливается, а затем почти мгновенно удаляется из сосуда, такие системы часто называют осцилляторами типа *накопление – сброс*. Если мы построим график зависимости уровня воды в сосуде и потока через сифон от времени (рис. 2.13), то интервалы медленных и быстрых движений будут хорошо видны.<sup>13</sup>

Описанный осциллятор – это, конечно же, модель-игрушка, но она обладает основными чертами реальных систем. Электронные генераторы, изученные Ван-дер-Полем в 1920-х годах [van der Pol 1926], функционируют очень похожим образом. Такой генератор со-

<sup>13</sup> Мы предполагаем, что кран лишь слегка открыт, так что отношение интервалов накопления и сброса,  $t_1/t_2$ , велико. Как будет проиллюстрировано далее, именно такой режим часто интересен в практических ситуациях.

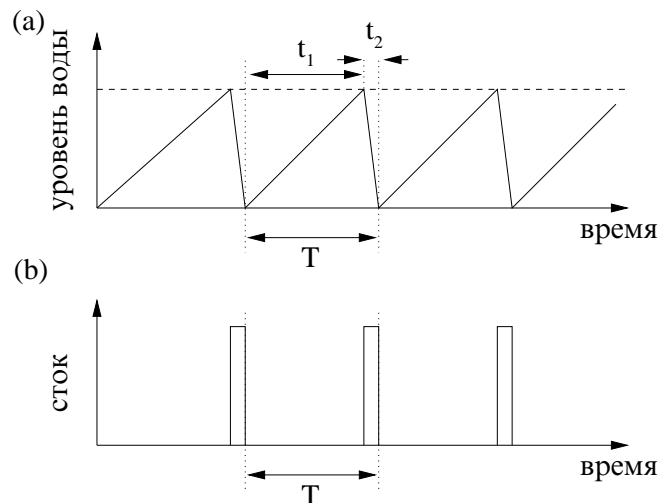


Рис. 2.13. Временная эволюция механического осциллятора типа «накопление – сброс», показанного на рис. 2.12. Вода накапливается до тех пор, пока не достигнет порогового уровня, показанного пунктирной линией (а), после чего уровень воды быстро спадает до нуля. Это соответствует импульсу на графике зависимости потока воды через сифон от времени (б).

стоит из батареи, конденсатора, сопротивления и неоновой лампы (рис. 2.14). Вначале конденсатор медленно заряжается; характерное время этого процесса определяется емкостью и сопротивлением. Рост напряжения на конденсаторе аналогичен повышению уровня воды в нашей модели-игрушке. Когда напряжение достигает некоторого критического уровня, в лампе возникает газовый разряд и она начинает проводить электрический ток, что сопровождается свечением. В результате, конденсатор быстро разряжается через лампу, его напряжение падает, и газовый разряд прекращается. Лампа вновь становится непроводящей, и этот процесс повторяется снова и снова. Как и поток воды из сосуда, электрический ток через неоновую лампу возникает в виде последовательности коротких импульсов (и, соответственно, коротких вспышек света), в то время как напряжение имеет пилообразную форму. Генераторы такого типа используются в электрических цепях осциллографов, телевизоров и компьютерных дисплеев. Действительно, электронный луч, формирующий изображение на экране, должен двигаться горизонтально с постоянной скоростью и затем практически мгновенно возвращаться; это реализуется использованием пилообразного напряжения для управления движением луча.

Общее свойство релаксационных осцилляторов – медленное возрастание (линейное или нет) некоторой величины и ее сброс при достижении порога – наблюдается во многих биологических системах. Так, например, механизм, весьма похожий на генерацию импульсов релаксационным генератором Ван-дер-Поля, может быть выявлен

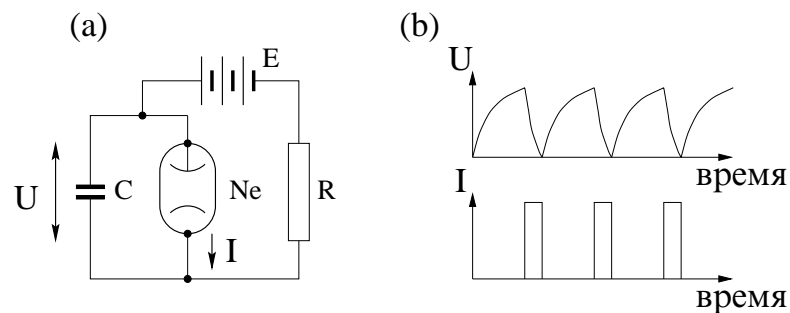


Рис. 2.14. Схема релаксационного генератора Ван-дер-Поля (a). Напряжение на конденсаторе возрастает, пока не достигнет порогового значения, при котором лампа становится проводящей. После этого конденсатор быстро разряжается, лампа вспыхивает, и наблюдается короткий импульс тока через лампу. Каждый цикл колебаний состоит, таким образом, из эпох накопления и сброса (b).

в нейронах, спонтанно генерирующих потенциалы действия: если к клетке подвести электрический ток, то потенциал (напряжение между точками внутри и вне клетки) обычно изменяется медленно, но время от времени он изменяется очень быстро, в результате чего генерируется короткий, длительностью порядка 2 мс потенциал действия – спайк (spike, рис. 2.15). Спайки генерируются в момент времени, когда клеточный потенциал достигает порогового значения  $\approx -50$  мВ; клетка при этом разряжается. После разряда клеточный потенциал сбрасывается до примерно  $-70$  мВ. Генерация спайков происходит за счет емкости клеточной мембраны и нелинейной зависимости ее проводимости от напряжения. Если к клетке подведен постоянный ток, то потенциалы действия генерируются регулярно. Медленное изменение тока изменяет частоту генерации нейрона, точно так же как частота колебаний уровня воды в модели на рис. 2.12 может быть подстроена с помощью крана. Так работают сенсорные нейроны: интенсивность стимула кодируется частотой генерации потенциалов действия. Понимание механизмов взаимодействия в нейронных ансамблях, которые часто моделируются ансамблем осцилляторов типа накопление–сброс, очень важно для решения различных проблем нейробиологии, например, для проблемы связывания (binding).<sup>14</sup>

Другой важный пример – это сокращения сердца. Известно, что изолированное сердце сохраняет способность к ритмическим сокра-

<sup>14</sup> Binding – это процесс комбинирования мозгом связанной, но пространственно распределенной информации, например, для распознавания образов.

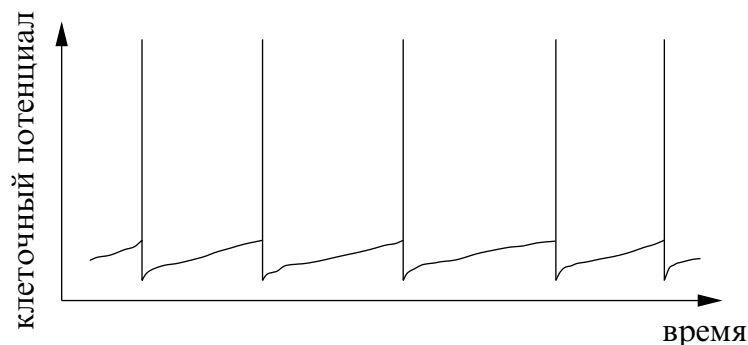


Рис. 2.15. Внутриклеточный потенциал нейрона медленно возрастает до порогового значения ( $\approx -53$  мВ в показанном здесь примере), а затем, после короткого импульса, сбрасывается. Схематически по [Hopfield 1994].

щениям *in vitro*: если деиннервированное сердце снабжается физиологическим раствором, обогащенным кислородом, через артерию, то активность пейсмекера первого порядка – синоатриального узла – продолжает вызывать сокращения. Конечно, такая система существенно отличается от сердца *in vivo*,<sup>15</sup> тем не менее, мы можем рассматривать обе системы как автоколебательные. Говоря о нормальном сердечном ритме мы рассматриваем всю сердечно-сосудистую систему как единый осциллятор, который включает в себя все контуры управления со стороны автономной нервной системы и все мозговые центры, участвующие в регуляции сердечного ритма. Мы понимаем, что эта система подвержена воздействию других физиологических ритмов, в первую очередь дыхания, и что ее невозможно изолировать полностью. Тем не менее, ясно, что эти другие ритмы не являются причиной сердцебиений, а скорее играют роль их возмущения. Сердце способно генерировать свой ритм самостоятельно, несмотря на эти возмущения, и, следовательно, мы можем считать эту систему автоколебательной.

Отметим, что, если мы рассмотрим функционирование сердца более детально, то обнаружим, что эта система состоит из нескольких автоколебательных систем (пейсмекеров первого и второго порядка), которые в норме синхронизованы между собой. Рассмотрение на еще более низком уровне показывает, что каждый пейсмекер, в свою очередь, представляет собой ансамбль генерирующих ритм клеток, которые синхронизируют свои потенциалы действия, чтобы инициировать сокращение сердца. Таким образом, явление синхронизации играет важную роль в функционировании сердца, и поэтому мы еще несколько раз вернемся к этому важному примеру (см. разделы 3.3.2 и 4.1.6).

<sup>15</sup> Так, например, частота сокращений сердца *in vitro* выше и вариабельность интервалов между сокращениями ниже, чем соответствующие значения для сердца *in vivo*.

## Глава 3

# Синхронизация периодических автоколебаний внешней силой

Эта глава посвящена простейшему случаю синхронизации: захвату частоты периодических автоколебаний внешней силой. Эту ситуацию можно рассматривать как особый случай взаимодействия маятниковых часов, описанного в главе 1. Предположим, что связь между часами – однонаправленная, т.е. одни часы воздействуют на другие, но не наоборот. Это и будет случаем внешнего воздействия, который мы подробно рассмотрим ниже. Однонаправленная связь – это не только упрощение, позволяющее дать более ясное описание синхронизации, но и модель, соответствующая множеству реальных ситуаций. Возможно, наилучшим примером служат не маятниковые, а современные часы, управляемые по радио. Время от времени их ход корректируется сигналом от сверхточных часов, и поэтому они показывают время с большой точностью. Мы уже упоминали примеры из живой природы: биологические часы, задающие циркадный ритм клеток и организмов, управляются периодической силой, возникающей вследствие вращения Земли вокруг своей оси и вокруг Солнца. Ясно, что это воздействие – однонаправленное. Ниже мы обсудим и ряд других примеров.

Начнем мы с рассмотрения квазилинейных автоколебаний, на которые действует синусоидальная сила. На этом примере мы объясним, в чем заключается захват частоты внешней силой, и подробно рассмотрим, что происходит с фазой и частотой системы при пере-



ходе к синхронизации. Затем мы опишем метод стробоскопического наблюдения; в дальнейшем он будет использоваться при изучении синхронизации сильно нелинейных систем, захвата частоты периодической последовательностью импульсов, а также синхронизации порядка  $n : m$ . Далее мы рассмотрим особенности синхронизации релаксационных автоколебаний и рассмотрим, что происходит с захватом частоты в присутствии шума. По ходу изложения будут приведены различные экспериментальные примеры. Наконец, мы обсудим некоторые явления, имеющие отношение к синхронизации, такие как хаотизация и подавление автоколебаний сильным внешним воздействием, а также эффект действия периодической силы на возбудимые системы и явление стохастического резонанса.

### 3.1 Слабое воздействие на квазилинейные автоколебания

Мы подробно обсудили автономные автоколебательные системы. Теперь мы рассмотрим, что происходит с ними при *слабом внешнем воздействии*. В качестве примера возьмем часы с маятником из магнитного материала и поместим их вблизи электромагнита, питаемого переменным током. В этой ситуации автоколебания часов возмущаются слабым переменным магнитным полем. Можно также периодически двигать вверх-вниз сами часы или же периодически ударять по маятнику.

Для простоты представления начнем со случая, когда автоколебания квазилинейны,  $x(t) = A \sin(\omega_0 t + \phi_0)$ , с частотой  $\omega_0$  и амплитудой  $A$ , а внешняя сила – гармоническая с частотой  $\omega$ , т.е. она имеет вид  $\varepsilon \cos(\omega t + \bar{\phi}_e)$ , где  $\bar{\phi}_e(t) = \omega t + \bar{\phi}_e$  – фаза силы, а  $\varepsilon$  – ее амплитуда. Важно, что частота силы  $\omega$  в общем случае отличается от частоты автоколебаний  $\omega_0$ , последнюю мы будем называть *автономной частотой*. Разность между частотами  $\omega - \omega_0$  называется *расстройкой*.

Что происходит в результате такого слабого воздействия? В общем случае можно ожидать, что внешняя сила меняет как амплитуду, так и фазу автоколебаний. Однако, как уже обсуждалось в разделе 2.2, амплитуда устойчива, а фаза нейтральна (ни устойчива, ни неустойчива). Поэтому слабая сила может изменить только фазу, но не амплитуду (см. рис. 2.3b). Следовательно, мы можем сконцентрироваться на динамике фазы.

Подчеркнем, что мы продолжаем использовать определение фазы, которое было введено для автономных колебаний. Мы не переопре-

деляем фазу при наличии силы. Соотношение между фазой и положением на предельном цикле остается старым (см. рис. 2.5). Поэтому под внешним воздействием фаза в общем случае будет вращаться не равномерно, а более сложным образом.

### 3.1.1 Автономные автоколебания и сила во вращающейся системе координат

В этом разделе мы рассматриваем квазилинейные автоколебания. Как было описано выше, предельный цикл представляет собой окружность, и фазовая точка вращается по нему равномерно с угловой скоростью  $\omega_0$ . Удобно изучать фазовую динамику вынужденных колебаний в новой системе отсчета, вращающейся в том же направлении (пусть это будет против часовой стрелки) с угловой скоростью, равной частоте внешней силы  $\omega$ .

В качестве первого шага обсудим, как автономные автоколебания выглядят в этой новой системе отсчета. Другими словами, временно будем считать, что амплитуда силы равна нулю ( $\varepsilon = 0$ ). Ясно, что в зависимости от соотношения между  $\omega$  и  $\omega_0$ , точка в новой системе отсчета либо продолжает вращаться против часовой стрелки (при  $\omega_0 > \omega$ ), либо стоит на месте (при  $\omega_0 = \omega$ ), либо вращается в противоположном направлении (при  $\omega_0 < \omega$ ), как показано на рис. 3.1. Положение точки можно характеризовать разностью фаз  $\phi - \phi_e$ , которая растет с постоянной скоростью  $\omega_0 - \omega$ , постоянна, или убывает со скоростью  $\omega_0 - \omega$ . Поскольку амплитуда силы равна нулю, введение величины  $\phi - \phi_e$  кажется на первый взгляд излишним. Но мы знаем, что когда-нибудь сила будет «включена», и тогда разность фаз  $\phi - \phi_e$  станет очень важной характеристикой движения.

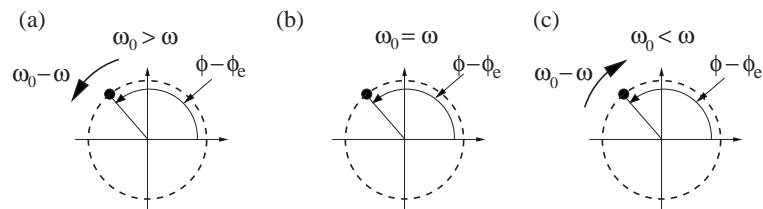


Рис. 3.1. В системе отсчета, вращающейся с частотой  $\omega$ , автоколебаниям соответствует вращающаяся (а и с) или неподвижная (б) точка, в зависимости от расстройки  $\omega_0 - \omega$ . Положение точки характеризуется угловой переменной  $\phi - \phi_e$ , которая растет (а), постоянна (б) или убывает (с).

Напомним читателю интерпретацию динамики фазы как движения легкой частицы в вязкой жидкости; эту аналогию мы уже обсуждали в разделе 2.2.2, мы будем активно использовать ее и в дальнейшем. В отсутствие расстройки,  $\omega_0 = \omega$ , фазовая точка во вращающейся системе покоится; это можно представить находящейся в покое на горизонтальной плоскости частицей (см. рис. 2.4с). Равномерный рост или убывание разности фаз  $\phi - \phi_e$  в случае ненулевой расстройки, т.е. при  $\omega_0 \neq \omega$ , можно представить скольжением частицы вниз по наклонной плоскости;<sup>1</sup> в этом случае часто говорят о движении частицы в наклонном потенциале. Такая частица показана на рис. 3.2а для случая  $\omega_0 > \omega$ , при обратном знаке расстройки плоскость наклонена в другую сторону, так что разность фаз  $\phi - \phi_e$  со временем убывает.

Теперь пришло время включить силу, т.е. положить  $\varepsilon \neq 0$ . В системе отсчета, вращающейся с угловой скоростью  $\omega$ , сила  $\varepsilon \cos(\omega t + \bar{\phi}_e)$ , осциллирующая с частотой  $\omega$ , представляется постоянным вектором<sup>2</sup> длины  $\varepsilon$ , действующим под некоторым углом  $\phi^0$ .<sup>3</sup> Результат действия силы на фазовую точку на цикле зависит от разности фаз  $\phi - \phi_e$  (рис. 3.3а). В самом деле, в точках 1 и 2 сила направлена перпендикулярно к траектории, и поэтому она не может сдвинуть

- <sup>1</sup> При постоянной силе такая частица движется с постоянной скоростью.
- <sup>2</sup> Точнее говоря, сила во вращающейся системе представляется постоянным вектором и вектором, вращающимся по часовой стрелке с частотой  $2\omega$ . Поскольку эти вращения гораздо быстрее движения точки ( $2\omega \gg |\omega_0 - \omega|$ ), влиянием этого второго вектора можно пренебречь, так как он действует попеременно в разных направлениях, и эти воздействия практически гасят друг друга.
- <sup>3</sup> Этот угол зависит от начальной фазы силы  $\bar{\phi}_e$  и от того, как она действует на осциллятор; обычно при квазилинейных автоколебаниях  $\phi^0 = \bar{\phi}_e + \pi/2$ , см. раздел 7.2.

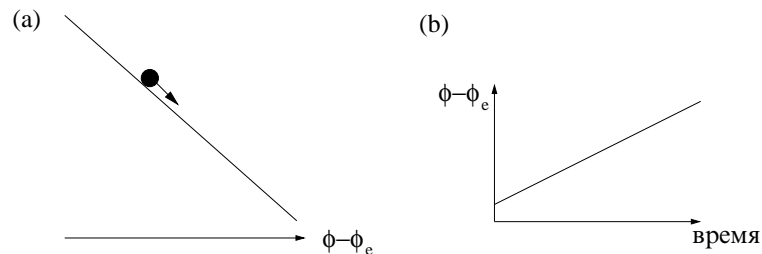


Рис. 3.2. (а) Частица, скользящая с постоянной скоростью по наклонной плоскости, изображает динамику фазы на предельном цикле во вращающейся системе отсчета; здесь изображен случай положительной расстройки ( $\omega_0 > \omega$ ). Фаза колебаний растет линейно по времени (б).

фазу автоколебаний. В точках 3 и 4 ее влияние максимально, а в точках 5–8 наблюдается промежуточный эффект. Отметим, что в некоторых точках сила действует по часовой стрелке, а в других – против. Легко видеть, что точки 1 и 2 отвечают *устойчивому и неустойчивому состояниям равновесия* (рис. 3.3а). Используя снова аналогию с движением легкой частицы на плоскости, можно сказать, что сила приводит к искривлению поверхности (потенциала), причем минимум и максимум соответствуют устойчивому и неустойчивому состояниям равновесия (рис. 3.3б). На математическом языке можно сказать, что положение равновесия  $\phi^0$  асимптотически устойчиво, в то время как фаза автономных автоколебаний устойчива нейтрально, но не асимптотически (см. рис. 2.4с).

### Промежуточное подведение итогов

Мы описали, как влияние расстройки и силы проявляется во вращающейся системе отсчета. Оно вкратце сводится к следующему.

- Расстройка без силы отвечает вращению фазовой точки с угловой скоростью  $\omega_0 - \omega$ . Это можно также представить как соскальзывание частицы по наклонной плоскости, наклон которой пропорционален расстройке.

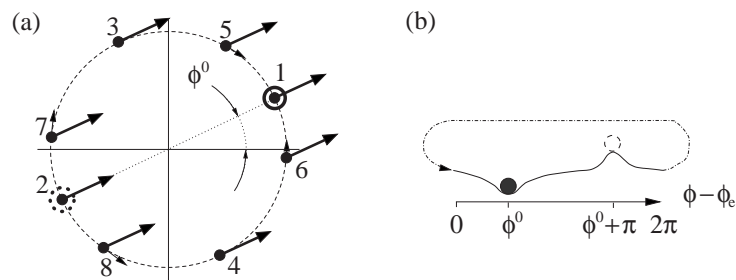


Рис. 3.3. (а) Слабая внешняя сила не может изменить амплитуду предельного цикла, но может сдвинуть фазу автоколебаний  $\phi$ . Влияние силы зависит от разности фаз  $\phi - \phi_e$ : в точках 3 и 4 это влияние максимально, а в точках 1 и 2 сила действует по радиусу и поэтому не сдвигает фазовую точку вдоль цикла. Отметим, что в окрестности точки 2 сила действует так, что фаза удаляется от положения 2. В противоположность этому, в окрестности точки 1 сила придвигает фазу к этому состоянию равновесия. Следовательно, внешняя сила создает устойчивое (окружность в точке 1) и неустойчивое (пунктирная окружность в точке 2) состояния равновесия на цикле. Эти состояния равновесия показаны также на рисунке (б) (ср. с рис. 2.4с).

- Сила без расстройки создает на цикле устойчивое и неустойчивое состояния равновесия. В другом представлении (рис. 3.3b) – сила создает неоднородный, периодический потенциал с минимумом и максимумом.

Теперь рассмотрим совместное действие обоих факторов – силы и расстройки – и определим условия, при которых сила может синхронизовать осциллятор.

### 3.1.2 Захват фазы и частоты

Начнем с простейшего случая нулевой расстройки, т.е. со случая, когда частота силы совпадает с частотой собственных автоколебаний. Из рис. 3.3 сразу видно, что при этом происходит: какая бы ни была начальная разность фаз  $\phi - \phi_e$ ,<sup>4</sup> фазовая точка движется в сторону устойчивого состояния равновесия (рис. 3.3a), так что в конце концов  $\phi = \phi_e + \phi^0$ , т.е. *фаза автоколебаний захватывается силой*. Подчеркнем, что захват происходит при сколь угодно малой силе. При этом, конечно, синхронный режим устанавливается за очень большое время. Этот случай довольно тривиален, поскольку частоты автоколебаний и силы с самого начала совпадают, так что синхронизация проявляется только в установлении определенного соотношения между фазами.

Пусть теперь частота силы отличается от частоты автономных автоколебаний, для определенности будем считать  $\omega_0 > \omega$ . Сила и расстройка действуют в противоположных направлениях: сила стремится сделать фазы  $\phi$  и  $\phi_e + \phi^0$  одинаковыми (фазовая точка стремится к минимуму потенциала), в то время как расстройка разводит их друг от друга. В зависимости от соотношения между расстройкой  $\omega_0 - \omega$  и амплитудой силы  $\varepsilon$  побеждает та или иная тенденция. В результате устанавливается один из двух возможных режимов; мы опишем их ниже, полагая  $\varepsilon$  постоянным и меняя расстройку.

#### *Малая расстройка: синхронизация*

Здесь мы рассмотрим влияние внешней силы на медленно вращающуюся фазовую точку (рис. 3.4). Как мы уже знаем, воздействие зависит от разности  $\phi - \phi_e$ . В некоторых точках сила ускоряет вращение, а в других замедляет его. При определенном значении разности фаз  $\Delta\phi = \phi - \phi_e - \phi^0$  (см. точку 1 на рис. 3.4) сила уравнивает

<sup>4</sup> Напомним, что начальная фаза колебаний произвольна.

вращение и останавливает его. В результате частота *вынуждаемых автоколебаний* (мы обозначаем ее через  $\Omega$  и называем *наблюдаемой частотой*) становится равной частоте силы,  $\Omega = \omega$ , а между фазами устанавливается устойчивое соотношение. Мы называем такое движение **синхронизованным**.

Подчеркнем, что при синхронизации фазы не совпадают, но их разность постоянна,  $\phi - \phi_e = \phi^0 + \Delta\phi$ ; угол  $\Delta\phi$  называют *сдвигом фазы*. Захват частоты можно представить и по-другому: сила создает минимумы в наклонном потенциале (рис. 3.5) и частица захватывается в одном из них.<sup>5</sup> Существует и вторая точка, где сила компенсирует вращение разности фаз (точка 2 на рис. 3.4), но это состояние неустойчиво; оно соответствует нахождению частицы в локальном максимуме потенциала.

#### Большая расстройка: квазипериодическое движение

Если расстройка превышает некоторый порог, то сила уже не может остановить вращение. Действительно, рассмотрение рис. 3.4 показывает, что с ростом расстройки (т.е. с ростом скорости вращения), состояния равновесия сдвигаются в сторону точки 3, где замедляющее

<sup>5</sup> Отметим, что потенциал теперь не  $2\pi$ -периодический, поскольку направления по и против часовой стрелки не эквивалентны вследствие вращения.

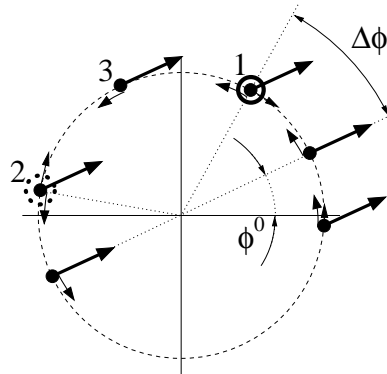


Рис. 3.4. Малая расстройка. Вращение фазовой точки возмущается внешней силой, которая ускоряет или замедляет его в зависимости от разности фаз  $\phi - \phi_e$ . Вращение обозначено стрелкой внутри круга; здесь оно происходит против часовой стрелки, что соответствует  $\omega_0 > \omega$ . В точке 1 вращение компенсируется силой. Эта точка становится устойчивым положением равновесия. Неустойчивое состояние равновесия – в точке 2 (ср. с рис. 3.3а). Фазовая точка останавливается силой, в результате чего устанавливается устойчивый сдвиг фаз  $\Delta\phi$ . Возможные значения  $\Delta\phi$  лежат в интервале  $-\pi/2 < \Delta\phi < \pi/2$ .

действие силы максимально. В конце концов устойчивое и неустойчивое состояния равновесия сталкиваются и исчезают, и фазовая точка начинает вращаться с так называемой **частотой биений**  $\Omega_b$ . В терминах движения частицы, сила приводит к изменению потенциала, но не создает минимумы (рис. 3.6a). Поэтому частица соскальзывает вниз, но ее скорость (и, соответственно, рост фазы) не постоянна (рис. 3.6b).

Хотя при данной расстройке внешняя сила недостаточна для синхронизации, она существенно влияет на динамику: сила делает вращение неравномерным и в среднем замедляет его, так что

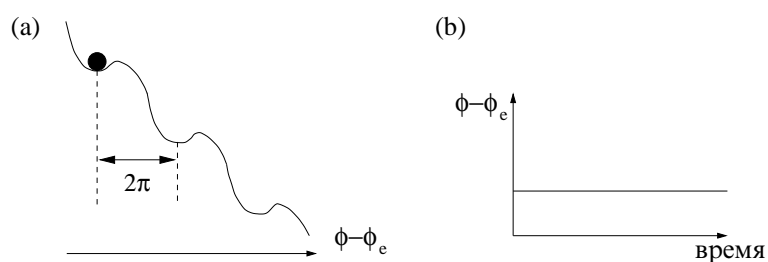


Рис. 3.5. Малая расстройка. Внешняя сила создает минимумы в наклонном потенциале (a) и частица располагается в одном из них. Это соответствует устойчивой постоянной разности фаз,  $\phi - \phi_e = \phi^0 + \Delta\phi$  (b).

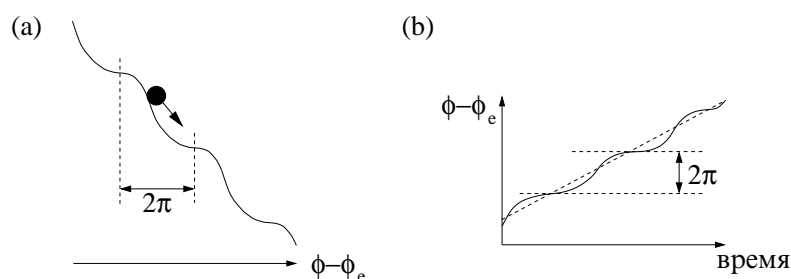


Рис. 3.6. Большая расстройка. Сила не может захватить частицу: локальных минимумов потенциала нет и частица соскальзывает вниз (a). Допороговая сила модулирует скорость частицы, поэтому разность фаз растет неравномерно (b). Средняя скорость роста, показанная штриховой линией, дает частоту биений. Из (a) видно, что период вращения (показанного двумя штриховыми линиями) совпадает с периодом модуляции.

$\Omega_b < \omega_0 - \omega$ .<sup>6</sup> Это замедление связано с тем, что частица почти останавливается в точках, где наклон потенциала минимален.

Возвращаясь к исходной системе отсчета, видим, что автоколебания имеют частоту  $\omega + \Omega_b < \omega_0$  и рост фазы модулирован с частотой биений  $\Omega_b$ . Такое движение, характеризующееся двумя частотами ( $\omega + \Omega_b$  и  $\Omega_b$ ), называется **квазипериодическим**. Более точно, движение – квазипериодическое, если отношение  $(\omega + \Omega_b)/\Omega_b$  иррационально, что является типичной ситуацией.

Подведем итоги: если расстройка мала, то даже малая сила может привести к появлению локальных минимумов потенциала и к захвату частоты автоколебаний. Чем больше расстройка, тем большая сила требуется для синхронизации.

### Захват частоты. Область синхронизации

Мы видели, что при постоянной амплитуде силы  $\varepsilon$  частота автоколебаний зависит от расстройки  $\omega_0 - \omega$ . При достаточно малой

<sup>6</sup> Напомним читателю, что автономные автоколебания представляются во вращающейся системе отсчета точкой, вращающейся с частотой  $\omega_0 - \omega$  (см. рис. 3.1) и что для определенности мы рассматриваем только случай положительных расстроек,  $\omega_0 > \omega$ .

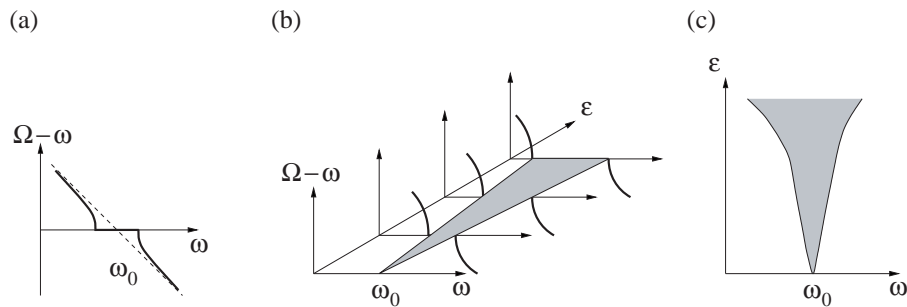


Рис. 3.7. (а) Разность частоты вынуждаемых автоколебаний  $\Omega$  и частоты внешней силы  $\omega$  как функция  $\omega$  при постоянном значении амплитуды силы  $\varepsilon$ . Вблизи частоты автономных автоколебаний  $\omega_0$  разность  $\Omega - \omega$  в точности равна нулю; это называют **захватом частоты**. При выходе из синхронизации частота вынуждаемых автоколебаний все равно отличается от  $\omega_0$  (штриховая линия показывает зависимость  $\omega_0 - \omega$  от  $\omega$ ): сила слишком слаба чтобы захватить автоколебания, но она подтягивает частоту автоколебаний к своей. (б) Семейство графиков  $\Omega - \omega$  от  $\omega$  при различных значениях амплитуды силы  $\varepsilon$  дает область, в которой частота вынуждаемых автоколебаний  $\Omega$  равна внешней частоте  $\omega$ . Эта область, показанная серым на (с), называется **областью синхронизации** или **языком Арнольда**.



расстройке частота  $\Omega$  захватывается – она становится равной  $\omega$ . Если расстройка превышает некоторый порог, то это равенство нарушается, как показано на рис. 3.7а.

*Совпадение частот в конечном диапазоне расстроек* есть основное свойство синхронизации, часто его называют **захватом частоты**.<sup>7</sup>

Удобно представить на одном графике все семейство кривых  $\Omega - \omega$  от  $\omega$  (рис. 3.7а) при различных значениях амплитуды силы  $\varepsilon$ . Эти кривые позволяют определить область на плоскости  $(\omega, \varepsilon)$ , соответствующую синхронизованному состоянию осциллятора (рис. 3.7б,с); отметим, что параметры  $\omega$  и  $\varepsilon$  отвечают внешней силе, именно они обычно меняются в эксперименте. Внутри этой области частота осциллятора равна частоте внешнего воздействия. Начиная с работ Эплтона и Ван-дер-Поля, эту область принято называть **областью синхронизации**, в последнее время чаще говорят о **языке Арнольда**.<sup>8</sup>

Отметим следующее важное обстоятельство: область синхронизации касается оси  $\omega$ . Это означает, что при нулевой расстройке автоколебания могут быть синхронизованы сколь угодно малой силой (хотя в этом случае переходный процесс к синхронному состоянию может длиться сколь угодно долго). Это свойство широко используется, например, в радиотехнике, в частности, в системах связи, где частота мощного генератора может быть стабилизирована слабым, но высококачественным сигналом от вспомогательного генератора.

### *Захват фазы: постоянный фазовый сдвиг*

Синхронизацию часто описывают и в терминах **захвата фазы**. Как мы уже видели, при асинхронном движении происходит неограниченный рост разности фаз, в то время как в синхронном режиме *разность фаз ограничена* и существует постоянный сдвиг между фазами автоколебаний и силы:

$$\phi(t) - \phi_e(t) = \text{constant}, \quad (3.1)$$

где постоянная равна  $\phi^0 + \Delta\phi$ . Сдвиг фазы  $\Delta\phi$  зависит от начальной расстройки. Если «пересекать» область синхронизации по линии

<sup>7</sup> В контексте синхронизации лазеров часто употребляется термин *захват мод*.

<sup>8</sup> При малых  $\varepsilon$  границы языка – прямые линии; это общий случай для слабо возмущаемых автоколебаний. При больших  $\varepsilon$  форма языка зависит от конкретных свойств автоколебаний и силы.

постоянной амплитуды силы  $\varepsilon$ , меняя ее частоту, то сдвиг фаз меняется на  $\pi$ ; он равен нулю при нулевой расстройке, т.е. в середине области синхронизации. Напомним, что постоянный угол  $\phi^0$  зависит от начальной фазы силы и от того, как она действует на осциллятор. Подчеркнем, что для захвата фазы требуется, чтобы разность фаз оставалась ограниченной в конечной области расстроек, т.е. внутри области синхронизации.

### 3.1.3 Переход к синхронизации

Опишем теперь, как происходит переход к синхронизации, т.е. как меняется динамика разности фаз на границе области синхронизации. Вся нужная информация у нас практически имеется, нужно только свести ее вместе.

#### *Проскоки фазы и перемежающаяся фазовая динамика в области перехода*

Пусть амплитуда силы постоянна, а частота меняется. Рассмотрим язык Арнольда, изображенный на рис. 3.8а; нас интересует, что происходит, если двигаться по горизонтальной линии на этой диаграмме. Начнем с нулевой расстройки (точка 1 на рис. 3.8а),  $\omega_0 = \omega$ , и будем постепенно уменьшать частоту внешней силы  $\omega$ . Другими словами, выберем  $\omega$  в середине области синхронизации и рассмотрим, как синхронизация пропадает при пересечении границы языка вследствие изменения частоты воздействия (рис. 3.8). Мы уже видели, что если расстройка равна нулю, то разность фаз равняется  $\phi^0$ ; для определенности будем считать  $\phi^0 = 0$  (см. случай 1 на рис. 3.8а и б). При увеличении расстройки сдвиг фазы становится ненулевым; этот случай показан точкой и линией с индексом 2. Когда точка пересекает границу языка, происходит потеря синхронизации и разность фаз растет неограниченно (точка 3 на (а) и кривая 3 на (б)). Однако этот рост не равномерен! В самом деле, есть периоды времени, когда разность фаз почти постоянна, и более короткие периоды, когда разность фаз довольно быстро увеличивается на  $2\pi$ . Такое быстрое изменение, выглядящее как скачок, часто называют *проскоком фазы* (*phase slip*).<sup>9</sup>

<sup>9</sup> Скорость фазового скачка зависит от амплитуды силы. При слабом воздействии проскок длится несколько, возможно даже много периодов силы.

Чередование периодов почти постоянной разности фаз с проскоками фазы означает, что в течение долгих интервалов времени система колеблется почти синхронно с внешней силой, а затем совершает одно дополнительное колебание (или пропускает один период, если выход из языка осуществляется через правую границу). В представлении, принятом на рис. 3.4, картина выглядит следующим образом: точка, изображающая фазу автоколебаний, вращается почти с той же угловой скоростью, что и фаза внешней силы, а затем ускоряется (замедляется) и совершает на один оборот больше (меньше), чем сила.

Чтобы пояснить это поведение, напомним аналогию с движением частицы в наклонном потенциале (рис. 3.6). Потере синхронизации соответствует исчезновение локальных минимумов потенциала, но потенциал все же остается искривленным. Частица скользит очень медленно, практически останавливаясь, на почти горизонтальных участках потенциала и относительно быстро по его крутым участкам. Это соответствует почти синхронным интервалам и проскокам

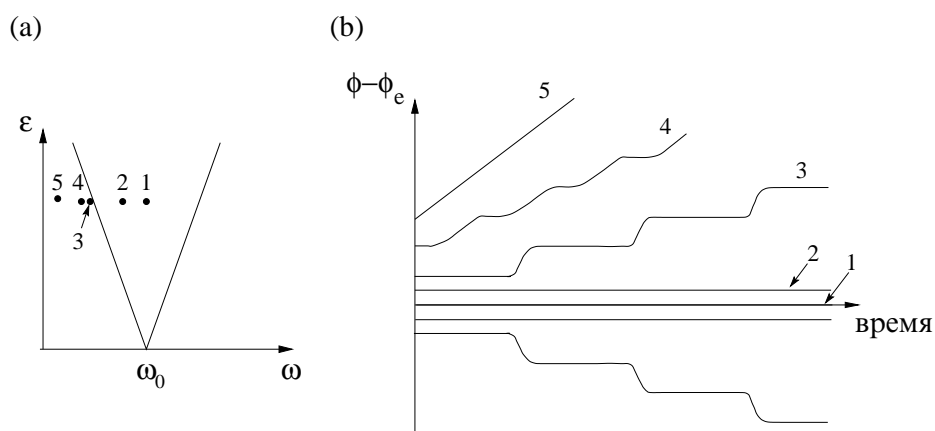


Рис. 3.8. Динамика фазы при переходе к синхронизации. Разность фаз показана на рисунке (b) для различных значений частоты силы; эти значения показаны на рисунке (a) точками 1–5, внутри и вне области синхронизации. В синхронном режиме (точки 1 и 2) разность фаз постоянна (линии 1 и 2 на рисунке (b)); она равна нулю в середине языка и отличается от нуля ближе к его краю. Сразу за границей языка динамика фазы – перемежающаяся: разность фаз выглядит как последовательность быстрых скачков (проскоков), перемежающихся с периодами почти синхронного поведения (точка и кривая 3). При дальнейшем продвижении от границы языка рост фазы становится все более равномерным (точки и кривые 4 и 5). Переход на правой границе языка происходит аналогично, но только разность фаз теперь убывает.

фазы. Синхронные интервалы и проскоки чередуются, так что можно сказать, что *динамика разности фаз – перемежающаяся*. Это проиллюстрировано на рис. 3.8b, кривая 3.

При дальнейшем росте расстройки продолжительность почти синхронных интервалов становится все меньше, и в конце концов рост разности фаз становится почти равномерным (рис. 3.8b, кривые 4 и 5). Естественно, что эта картина симметрична по отношению к знаку расстройки; увеличение частоты внешней силы соответствует отрицательному наклону потенциала.

#### Как различить синхронное и квазипериодическое движение: фигуры Лиссажу

На языке частот выход из синхронизации представляет собой переход от движения с одной частотой  $\omega$  к квазипериодическому движению с двумя частотами. Этот переход легко виден на графике, где некоторая наблюдаемая осциллятора представлена как функция внешней силы (рис. 3.9). Если частоты обоих процессов идентичны (синхронное движение), то график представляет собой замкнутую

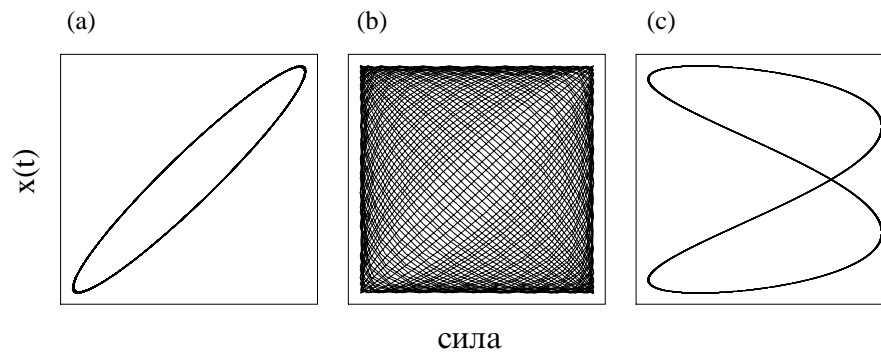


Рис. 3.9. Фигуры Лиссажу служат индикатором синхронизации. Наблюдаемая вынужденных автоколебаний  $x(t)$  представлена в зависимости от силы. (а) Синхронное состояние. Периоды колебаний по обеим осям идентичны, поэтому график – это замкнутая кривая. (б) Квазипериодический режим. Точка никогда не возвращается в исходное положение и кривая заполняет всю область. (с) Фигура Лиссажу типа восьмерки соответствует случаю, когда сила совершает два колебания в то время как осциллятор – одно. Это пример синхронизации более высокого порядка (1 : 2), она будет обсуждаться в разделе 3.2. (Отметим, что для наглядности масштаб по осям выбран различным; на самом же деле амплитуда силы гораздо меньше амплитуды сигнала (слабое воздействие).)

кривую, известную как *фигура Лиссажу*. В противном случае, если частоты различны, то график заполняет целую область. Этот метод особенно удобен для экспериментальной реализации: достаточно просто подать два сигнала на горизонтальный и вертикальный входы осциллографа (хотя в наши дни для построения графиков чаще используется компьютер).

Фигуры Лиссажу не только позволяют оценить соотношение между частотами, но и помогают оценить сдвиг фаз в синхронном режиме. Например, в случае, показанном на рис. 3.9а, фазовый сдвиг близок к нулю; кривая «схлопывается» в прямую при  $\phi(t) = \phi_e(t)$ ; фигура Лиссажу в виде окружности соответствует сдвигу фаз  $\pm\pi/2$ .

### 3.1.4 Пример: захват частоты дыхания механической вентиляцией

Перейдем от абстрактных задач к реальной ситуации. Для иллюстрации синхронизации внешней силой мы опишем результаты экспериментов по захвату частоты спонтанного дыхания пациентов, находящихся под наркозом, установкой искусственного дыхания; эти эксперименты описаны в статье [Graves *et al.* 1986], см. также [Гласс и Мэки 1988]. Были использованы данные, полученные на восьми пациентах, подвергавшихся несложным, но требовавшим общего наркоза операциям. Пациенты были молодыми людьми обоего пола без каких-либо сердечных, дыхательных и неврологических расстройств.

Ритм дыхания генерируется в дыхательном центре мозга. Из экспериментов над животными уже с конца 19-го века было известно, что на этот ритм могут влиять механическое расширение и сжатие легких, это называют рефлексом Геринга–Брейера.

Искусственное дыхание – обычная клиническая процедура, и исследование Graves *et al.* [1986], кроме того, что оно интересно с точки зрения нелинейной динамики, имеет и практическое значение. Действительно, чтобы искусственное дыхание было эффективным, пациент не должен «бороться» с машиной. Поэтому для успешного проведения процедуры должно быть достигнуто определенное соотношение между фазами, так чтобы механическое расширение легких совпадало бы с вдохом.

В описываемых экспериментах менялась частота и амплитуда механической вентиляции; в наших обозначениях эти величины отвечают частоте и амплитуде внешней силы. В зависимости от этих параметров наблюдались как синхронные, так и асинхронные режимы (рис. 3.10). Видно, что в синхронном режиме каждому циклу меха-

нической вентиляции соответствует один цикл дыхания. Посмотрим подробнее на фазовые соотношения. Graves *et al.* [1986] вычисляли мгновенную частоту и разность фаз для 24 последовательных циклов.<sup>10</sup> Графики этих величин представлены на рис. 3.11. С каждым

<sup>10</sup> Частота определялась как обратная длительность цикла. Разность фаз вычислялась путем определения задержки от начала механического вдувания до начала спонтанного вдоха. В главе 6 мы подробно обсудим методы получения фазы и частоты из экспериментальных данных.

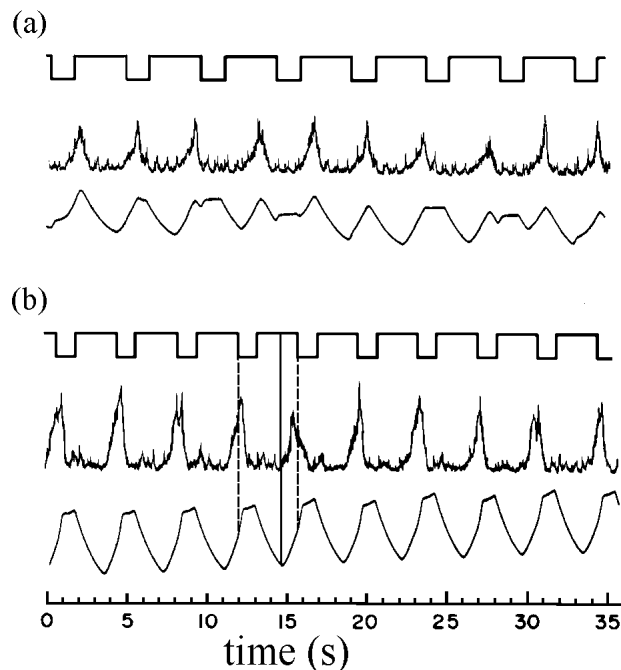


Рис. 3.10. Асинхронные (а) и синхронные (b) режимы дыхания. Верхние кривые изображают механическую вентиляцию (направление вниз соответствует вдуванию воздуха). Средние кривые – частично обработанные записи электромиограмм диафрагмы; эти кривые соответствуют сигналу от дыхательного центра. Нижние кривые показывают объем наполнения легких. Штриховая и сплошная линии на (b) отмечают начало вдувания и вдоха. Отметим, что захват частоты спонтанного дыхания внешней силой (механическим вдуванием) приводит к периодическому изменению объема наполнения (b). Потеря синхронизации приводит к противоположному действию спонтанного дыхания и вдувания; в результате амплитуда колебаний объема наполнения время от времени уменьшается (а). Такое поведение, типичное для квазипериодического движения, в англоязычной медицинской и биологической литературе часто называется структурой «waxing and waning» (подъем и спад). Из [Graves *et al.* 1986].

пациентом проводились три различных эксперимента, в которых частота вентиляции была ниже, равна и выше средней «свободной» частоты, т.е. частоты спонтанного дыхания. «Свободная» частота показана штриховой линией, а частота искусственного дыхания – сплошной. Мы видим, что частота дыхания действительно захвачена: если есть расстройка, то частота дыхания сдвигается к частоте внешнего воздействия. Что касается соотношения между фазами, то, в зависимости от расстройки, фаза дыхания опережает фазу силы, примерно совпадает с ней, или отстает. Это соответствует предсказаниям теории.

На рис. 3.12 показаны данные, полученные при относительно большой расстройке между частотами искусственного и «свободного» дыхания; в этом случае захвата не происходит. Разность фаз убывает или возрастает – в соответствии с теоретическими кривыми показанными на рис. 3.8.

Завершая рассмотрение этого примера, можно сказать, что динамика вынуждаемых автоколебаний в живой системе согласуются с основными предсказаниями теории, как для захваченного, так и

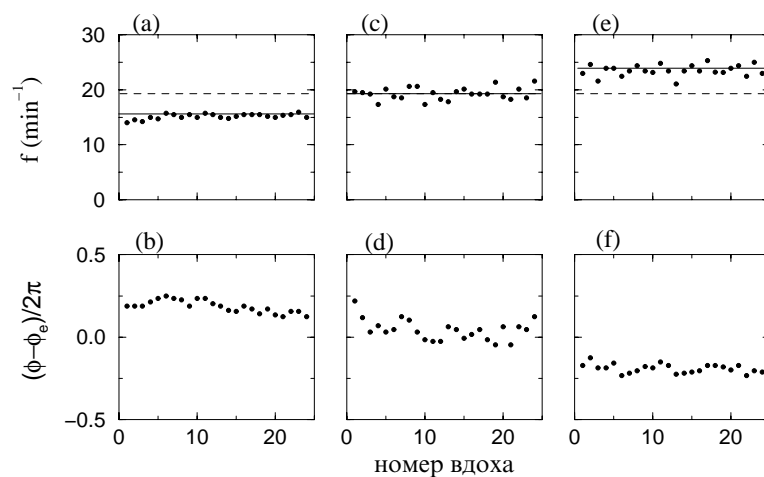


Рис. 3.11. Частота дыхания при механической вентиляции (а, с, и е) и разность фаз искусственного и спонтанного дыхания (b, d и f), вычисленные по 24 последовательным циклам. Графики соответствуют трем синхронным режимам, при которых частота воздействия (сплошная линия) меньше (а, b), равна (с, d) или больше (е, f) «свободной» частоты (штриховая линия). Частота дыхания захвачена, она флуктуирует вокруг частоты внешней силы. Средний сдвиг фаз соответственно положителен (b), близок к нулю (d) или отрицателен (f). Из [Graves *et al.* 1986].

для асинхронного состояния. Этот пример показывает также, что основные результаты не меняются, если форма силы отличается от синусоидальной. Единственное отличие от теории состоит в том, что частота захваченных колебаний не постоянна и разность фаз флуктуирует. Можно указать на две причины этого отличия. Во-первых, живая система – это не идеальный автогенератор, ее параметры меняются во времени, а также она подвержена влиянию шумов. Мы подробно обсудим эти факторы в разделе 3.4. Во-вторых, дыхание отличается от синусоидального процесса: вдох происходит быстрее, чем выдох. Этот фактор мы обсудим в следующем разделе.

### 3.2 Синхронизация внешней силой: более общий подход

Мы описали простейший случай захвата фазы, используя для примера вынуждаемые квазигармонические автоколебания. Для описания более общей ситуации, в которой могут также наблюдаться сложные синхронные режимы, мы введем весьма общий стробоскопический

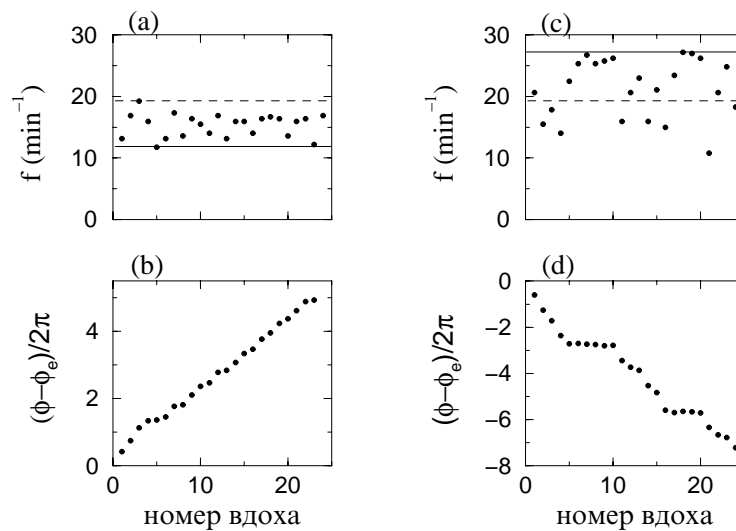


Рис. 3.12. Те же величины, что и на рис. 3.11, но для двух асинхронных режимов. Частота силы меньше (a, b) или больше (c, d) «свободной» частоты. Разность фаз растет почти равномерно (b) или перемежающимся образом (d), эти кривые следует сравнить с кривыми 3 и 4 на рис. 3.8b. (a), (c) из [Graves *et al.* 1986]. (b), (d) построены с использованием данных из [Graves *et al.* 1986].



метод. С использованием этого подхода мы опишем захват автоколебаний импульсной силой и рассмотрим общий случай синхронизации порядка  $n : m$ . В заключение этого раздела мы обобщим понятия захвата фазы и частоты.

### 3.2.1 Стробоскопический метод

Здесь мы опишем подход, который будет широко использоваться ниже как в теории, так и в эксперименте – это **стробоскопический метод**. Название происходит от хорошо известного оптического прибора, позволяющего измерять частоту вращения или колебаний механического объекта путем освещения его периодическими вспышками, так, что если частота вспышек совпадает с измеряемой частотой, то объект кажется неподвижным. Если эти частоты слегка различны, то маятник (колесо) выглядит в пульсирующем свете медленно колеблющимся (вращающимся). Например, киносъемка позволяет нам наблюдать объекты стробоскопически с частотой 24 кадра в секунду.

Метод, который мы опишем в этом разделе, схож с принципом оптического стробоскопа. Единственное различие состоит в том, что мы наблюдаем не реальный объект в физическом пространстве, а положение точки в фазовом пространстве, т.е. ее положение на аттракторе.<sup>11</sup> Для периодических автоколебаний положение точки на аттракторе однозначно соответствует фазе автоколебаний. Идея метода очень проста: будем наблюдать фазу автоколебаний под периодическим воздействием не все время, а только в моменты времени  $t_k = k \cdot T$ , где  $T$  – период внешней силы и  $k = 1, 2, \dots$ . Другими словами, мы наблюдаем вынужденные движения в моменты времени, когда фаза внешней силы принимает некоторое фиксированное значение.

Перед тем, как перейти к примерам, опишем, что мы ожидаем увидеть при синхронизации не квазигармонического осциллятора. Предельный цикл сильно нелинейного осциллятора далек от окружности, и движение по нему в общем случае неравномерно. Это затрудняет использование вращающейся системы отсчета для анализа синхронизации, как было описано в предыдущем разделе; стробоскопический же метод работает и в этом случае. Если автоколебания синхронизованы внешней силой, т.е.  $\Omega = \omega$ , то ясно, что, если предельный цикл «подсвечивать» с частотой  $\omega$ , то точка всегда будет

<sup>11</sup> В этом разделе мы имеем дело с предельными циклами, но в дальнейшем мы применим этот метод и к системам со странными (хаотическими) аттракторами.

находиться в одном и том же положении. Если автоколебания не захвачены, то определенного соотношения между фазами нет, и мы ожидаем, что в моменты наблюдения  $\phi$  может принимать любые значения. Если наблюдать осциллятор достаточно долго, то можно вычислить распределение фаз  $\phi_k = \phi(t_k)$ . При синхронизации это распределение сосредоточено в одной точке, а в асинхронном состоянии оно широкое,<sup>12</sup> см. рис. 3.13.

Стробоскопический метод – это специальный случай **отображения Пуанкаре**, хорошо известного в теории колебаний и в нелиней-

<sup>12</sup> Если фазовая точка вращается неравномерно, то она более часто находится в определенной фазе, поэтому распределение широкое, но не обязательно равномерное. Отметим, что даже в случае квазигармонических автоколебаний вблизи перехода к синхронизации распределение не равномерное, поскольку под влиянием силы фазовая точка вращается неравномерно и разность фаз растет нелинейно (см. рис. 3.8).

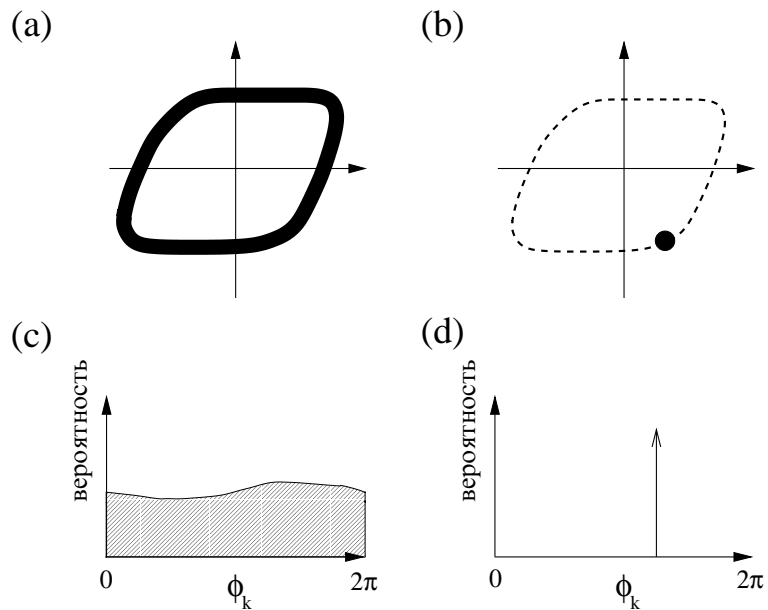


Рис. 3.13. Стробоскопическое наблюдение точки на предельном цикле. (a) Если частота автоколебаний отличается от частоты наблюдения (силы),  $\Omega \neq \omega$ , то точка может быть обнаружена в любом месте цикла. (b) Если осциллятор захвачен,  $\Omega = \omega$ , то фаза  $\phi_k$  автоколебаний определенным образом соотносится с фазой силы и всегда одна и та же. (c, d) Распределение фазы  $\phi_k$  вынуждаемых автоколебаний в моменты времени  $t_k$ , когда фаза внешней силы принимает определенное значение  $\phi_e = \text{constant}$ . В асинхронном режиме это распределение широкое (c), а в синхронном состоянии – это  $\delta$ -функция (d).

ной динамике. Его важное преимущество состоит в том, что этот метод применим к произвольным автоколебаниям, не обязательно квазигармоническим, но также к релаксационным и даже к хаотическим (см. главу 5). Стробоскопический метод работает и для гармонической силы, и для силы, представляющей собой последовательность импульсов; он полезен при рассмотрении шумовых процессов и при экспериментальном исследовании синхронизации.

### 3.2.2 Пример: периодическая стимуляция светлячка

Известно, что самцы светлячков периодически испускают свет, чтобы привлечь самок. Они могут синхронизовывать эти вспышки с соседями (см. раздел 1.1, а также подробное описание в работе [Buck and Buck 1968]). Для исследования этого явления Buck *et al.* [1981] (см. также [Ermentrout and Rinzel 1984]) исследовали, как изменяются вспышки одного светлячка *Pteroptyx malaccas* под действием периодической последовательности световых импульсов. Результаты представлены на рис. 3.14. Период воздействия был изменен с 0.77 с до 0.75 с в момент времени  $t \approx 22$  с. В результате этого переключения произошел переход от синхронизации к асинхронному режиму. Поскольку этот переход плохо виден на рис. 3.14, мы применим стробоскопический метод к двум временным интервалам,  $0 < t < 22$  с и  $22 < t < 130$  с (рис. 3.15).

Отметим, что как силу, так и сигнал (вынуждаемые автоколебания) можно рассматривать как последовательность событий (коротких импульсов), т.е. как *точечный процесс*. Естественно считать,

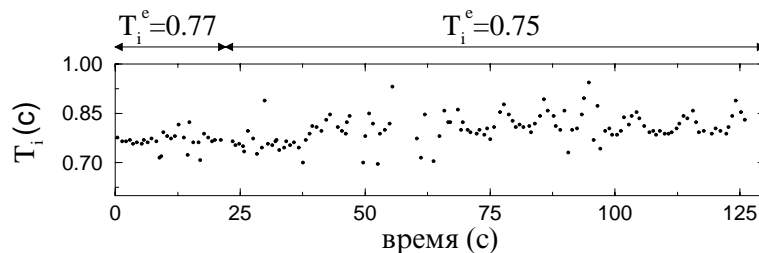


Рис. 3.14. Вспышки светлячка в ответ на периодическое воздействие. Интервалы времени  $T_i$  между последовательными вспышками представлены как функция времени. Период воздействия  $T_i^e$  при  $t \approx 22$  с был изменен с 0.77 до 0.75 с. График построен с использованием данных из [Ermentrout and Rinzel 1984].

что интервал между импульсами составляет один цикл, в течение которого фаза увеличивается на  $2\pi$ . Удобно наблюдать фазу колебаний светлячка  $\phi$  в моменты внешних вспышек; эту фазу  $\phi_k$  можно определить как долю соответствующего интервала между вспышками светлячка. Из рис. 3.15 находим, что в случае воздействия с периодом 0.77 с стробоскопически наблюдаемая фаза  $\phi_k$  практически постоянна, в то время как при воздействии с периодом 0.75 с фаза распределена по окружности. Это свидетельствует соответственно о синхронизации и ее отсутствии. (Фаза  $\phi_k$  не строго постоянна в синхронном режиме, поскольку светлячок — это, конечно, автогенератор с шумом.)

При построении стробоскопической картинки мы расположили фазы вспышек светлячка по окружности. Это не означает, что мы считаем осциллятор квазигармоническим: просто мы выбрали для амплитуды произвольное постоянное значение. Здесь важно подчеркнуть, что на самом деле амплитуда, т.е. форма цикла, никакого значения не имеет. Синхронизация проявляется как соотношение между фазами, и ее установление можно проследить с помощью стробоскопического графика и распределения стробоскопически на-

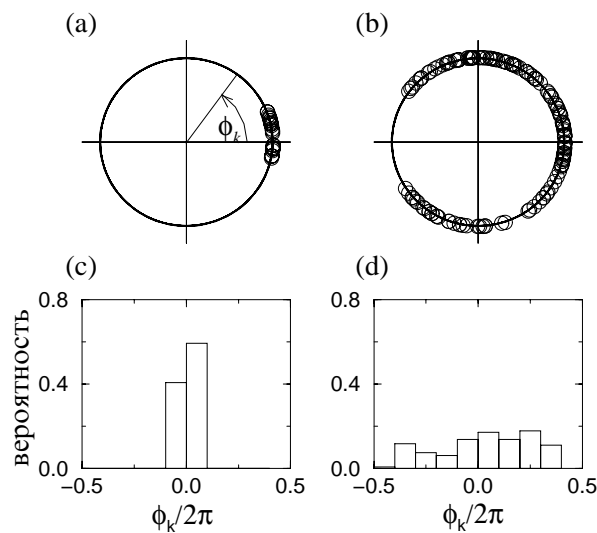


Рис. 3.15. Стробоскопическое наблюдение вспышек светлячка при периодическом воздействии. Распределение фаз на временном интервале  $0 \text{ s} < t < 22 \text{ s}$  узкое (а и с), а в случае  $22 \text{ s} < t < 130 \text{ s}$  — широкое (b и d), что соответствует потере синхронизации при  $t \approx 22 \text{ s}$  (ср. с рис. 3.13). График построен с использованием данных из [Ermentrout and Rinzel 1984].

блюдаемой фазы.

### 3.2.3 Захват последовательностью импульсов

Довольно часто внешнюю силу можно рассматривать как последовательность импульсов. В этом случае автоколебания являются автономными в течение почти всего периода и только на коротком промежутке времени подвергаются действию силы. Чтобы пояснить этот момент, проведем снова «мысленный» эксперимент с маятниковыми часами. Пусть маятник подвергается периодическим толчкам, направление и сила которых постоянны. Иногда толчки ускоряют маятник (если они действуют в направлении его движения), а иногда они замедляют его. Если маятник изначально колебался медленнее, то толчки чаще ускоряют его, и наоборот. В результате происходит синхронизация. Это свойство используется для управления современными часами по радио: они периодически подстраиваются импульсным сигналом, исходящим от стандартных, очень точных часов. Импульсная сила и импульсное взаимодействие играют важную роль и в биологических системах, например, в ансамблях нейронов, водителях сердечного ритма (пейсмейкерах) и т.д. Подобная сила часто используется при экспериментальном исследовании биологических осцилляторов. Мы уже рассматривали пример с периодически стимулируемым светлячком, ниже мы опишем периодическое воздействие на клетки сердца, задающие ритм его сокращений. Однако, перед тем как перейти к этому примеру, мы объясним эффект синхронизации последовательностью импульсов, используя стробоскопический метод (см. также [Харкевич 1962; Гласс и Мэки 1988]).

#### *Переустановка фазы одиночным импульсом*

В качестве предварительного шага рассмотрим влияние одиночного импульса на автоколебания. При этом мы используем следующее свойство возмущений: отклонение точки в радиальном направлении (т.е. по амплитуде) быстро затухает,<sup>13</sup> в то время как возмущения фазы остаются (рис. 3.16). Таким образом, импульс сдвигает фазу  $\phi \rightarrow \phi + \Delta$ . Очевидно, что знак и абсолютное значение изменения фазы  $\Delta$  зависят и от того, в какой фазе действовал импульс, и от его величины.

<sup>13</sup> Отметим, что в данном случае мы не предполагаем, как раньше, что амплитуда не меняется под действием силы. Тем не менее, мы по-прежнему считаем, что амплитуда относительно устойчива, и поэтому ее значение очень быстро возвращается к невозмущенному состоянию.

### Периодическая последовательность импульсов

Рассмотрим теперь воздействие периодической (с периодом  $T$ ) последовательности импульсов на автоколебания с частотой  $\omega_0$ . Для определенности положим  $\omega_0 > \omega = 2\pi/T$ . Будем наблюдать автоколебания стробоскопически, в те моменты времени, когда действует импульс (рис. 3.17). Если бы не было силы, то, скажем, в течение трех последовательных наблюдений осциллятор был бы обнаружен в положениях, обозначенных на рис. 3.17а цифрами 1, 2 и 3. Поскольку  $\omega_0 > \omega$ , за один период между наблюдениями точка на цикле совершает один полный оборот плюс небольшой сдвиг, который мы обозначим  $\nu$ .

Предположим теперь, что импульсная сила «включается», когда точка находится в положении 2. Если импульс сдвигает фазу в точности на величину  $\nu$ , то этот сдвиг компенсирует смещение фазы из-за расстройки. Действительно, после действия импульса точка попадает в положение 1 и, пока не придет следующий импульс, она движется автономно. Это означает, что за время  $T$  точка переходит в положение 2; следующий импульс снова сдвигает ее в 1 (рис. 3.17b). Таким образом, наблюдая точку стробоскопически с периодом силы, мы всегда находим ее в одном и том же месте цикла, что означает синхронизацию.

Очевидно, что синхронизация будет наблюдаться, если импульсы имеют определенную амплитуду и прилагаются в определенной фазе. Как мы уже знаем, большая расстройка требует большей амплитуды силы: если между двумя импульсами точка сдвигается от положения 1 до положения 3, то для переустановки фазы на величину  $2\nu$  требуется импульс большей амплитуды, и сдвиг фаз между

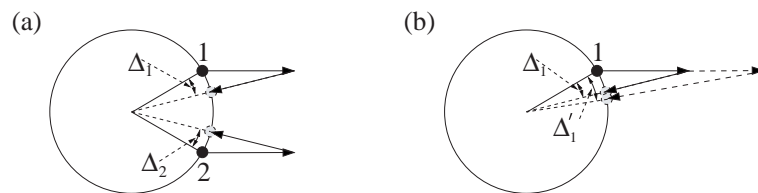


Рис. 3.16. Переустановка фазы автоколебаний одиночным импульсом  $\phi \rightarrow \phi + \Delta$  (phase resetting). (a) Влияние импульса зависит от фазы осциллятора в момент воздействия. Если импульс действует на точку 1, то фаза отстает ( $\Delta_1 < 0$ ); возмущение, приложенное в точке 2, приводит к положительному изменению фазы ( $\Delta_2 > 0$ ). (b) Влияние силы импульса: чем больше амплитуда (вектор, показанный штриховой линией), тем больше изменение фазы ( $|\Delta'_1| > |\Delta_1|$ ).

силой и синхронизованными автоколебаниями также увеличивается.

Если сила сначала прилагается в произвольной фазе, то она в общем случае не может немедленно «остановить» вращение точки, но сделает это после некоторого переходного процесса. Из простых геометрических соображений следует, что если сила начинает действовать, когда точка находится в положении 3, то первый импульс переведет ее в положение между 2 и 1, следующий приведет ее еще ближе к 1 и т.д.; в конце концов установится синхронный режим.

Более формально синхронизацию периодически возмущаемых автоколебаний можно описать, введя соотношение между фазами после  $n$ -го и  $(n + 1)$ -го импульсов,  $\phi_{n+1} = \phi_n + \nu + \Delta(\phi_n + \nu)$ . Здесь постоянная  $\nu$  есть набег фазы вследствие расстройки,<sup>14</sup> а  $\Delta(\phi_n + \nu)$  описывает переустановку фазы  $(n + 1)$ -м импульсом. Условием син-

<sup>14</sup> Для произвольного предельного цикла фаза растет со временем линейно (см. раздел 2.2), и поэтому  $\nu$  постоянно. Следовательно, наш подход справедлив в общем случае: в нем не требуется, чтобы точка вращалась по циклу равномерно. Отметим также, что фазы  $\phi + 2\pi$  и  $\phi$  считаются здесь эквивалентными.

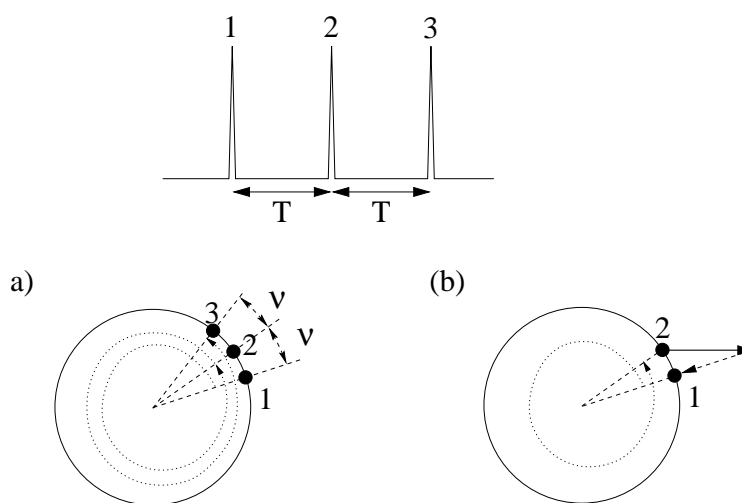


Рис. 3.17. (а) Стробоскопическое наблюдение автономных автоколебаний в моменты появления импульсов; когда появляется импульс 1, точка находится в положении 1, и т.д. Частота автоколебаний выбрана большей, чем частота импульсов,  $\omega_0 > \omega = 2\pi/T$ ; поэтому стробоскопически наблюдаемая точка движется вдоль цикла. (б) Синхронизация путем переустановки фазы. Периодические импульсы, прикладываемые в положении 2, сдвигают фазу в положение 1, что компенсирует разность фаз, возникающую из-за расстройки. Между импульсами фаза эволюционирует как в автономной системе.

хронизации является равенство  $\phi_{n+1}$  и  $\phi_n$ . Отображение  $\phi_n \rightarrow \phi_{n+1}$  известно в нелинейной динамике как **отображение окружности**. Этот способ описания динамики подробно обсуждается в разделе 7.3, здесь же мы ограничимся качественным описанием явления.

### 3.2.4 Синхронизация высшего порядка. Языки Арнольда

До сих пор мы всегда предполагали, что частота автономных автоколебаний только слегка отличается от частоты внешней силы, и синхронизация понималась как подстройка этих частот за счет воздействия, в результате чего они совпадали. Здесь мы покажем, что синхронизация может возникнуть и в более сложной форме. Рассмотрим снова автоколебания под действием периодических толчков и предположим, что каждый второй толчок отсутствует. Следовательно, осциллятор остается автономным в течение времени  $2T$ , и за это время точка на цикле смещается от положения 1 к положению 3. Из рис. 3.18 ясно, что достаточно большой импульс может компенсировать набег фазы  $2\nu$ , образовавшийся с момента предыдущего воздействия.

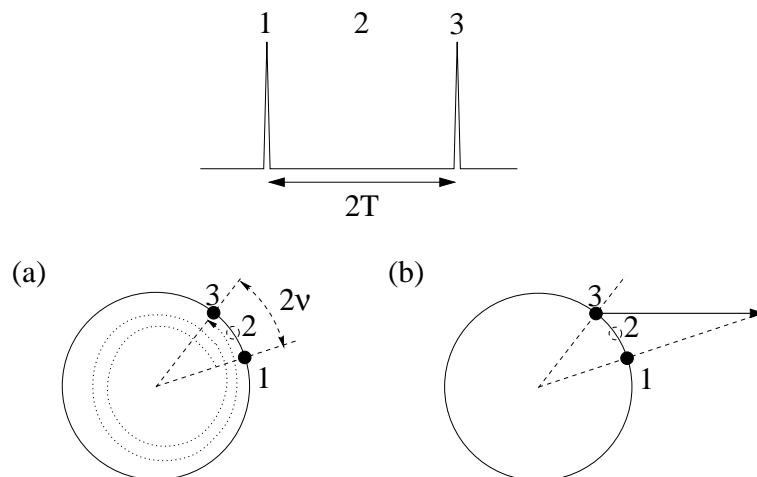


Рис. 3.18. Синхронизация автоколебаний последовательностью импульсов с периодом  $2T$ . (а) Между двумя импульсами точка переходит из положения 1 в положение 3. (б) Синхронизация может быть достигнута, если каждый второй импульс отсутствует, но амплитуда достаточно велика (ср. с рис. 3.17b).



Таким образом, автоколебания с частотой  $\omega_0$  могут быть захвачены силой с частотой, близкой (но не обязательно равной!) к  $\omega_0/2$ , и синхронизация тогда проявляется как возникновение следующего соотношения между частотами:  $2\omega = \Omega$ . Этот режим называют *синхронизацией порядка 2 : 1*. Очевидно, что можно добиться захвата и каждым третьим импульсом, хотя для этого понадобится еще более увеличить амплитуду воздействия при той же расстройке. В общем случае можно наблюдать синхронные режимы произвольного порядка  $n : t$  ( $n$  импульсов на  $t$  периодах колебаний), что позволяет нарисовать целое семейство областей синхронизации (рис. 3.19). Эти области принято называть **языками Арнольда**.

Важно отметить, что языки высокого порядка обычно очень узки, так что их довольно трудно, если вообще возможно, наблюдать экспериментально. Это можно объяснить, анализируя рис. 3.17 и

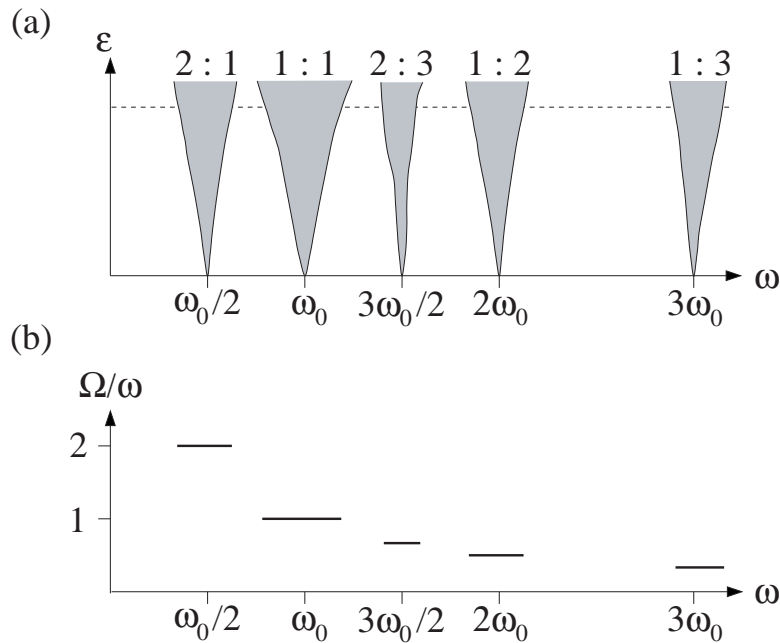


Рис. 3.19. (а) Схематическое представление языков Арнольда, или областей синхронизации порядка  $n : t$ . Числа над каждым языком обозначают порядок синхронизации, например,  $2 : 3$  означает выполнение соотношения  $2\omega = 3\Omega$ . (б) График зависимости  $\Omega/\omega$  от  $\omega$  для фиксированной амплитуды силы (показанной штриховой линией на (а)) имеет характерный вид *чертовой лестницы*, см. полный график на рис. 7.16 (здесь мы не показываем детали между главными ступеньками).

3.18. Мы видим, что при той же расстройке для синхронизации порядка 2 : 1 требуется гораздо большая амплитуда импульсов. С другой стороны, если амплитуда фиксирована, то переустановка фазы, скажем, каждым вторым импульсом позволяет компенсировать меньшую расстройку, чем переустановка каждым импульсом. Это как раз и означает, что область синхронизации 2 : 1 уже, чем область синхронизации 1 : 1.

### 3.2.5 Пример: периодическая стимуляция пейсмекерных клеток

Для иллюстрации представленного выше теоретического рассмотрения проблемы мы выбрали эксперименты монреальской группы [Guevara *et al.* 1981, 1989; Гласс и Мэки 1988; Zeng *et al.* 1990; Glass and Shrier 1991] по периодической стимуляции спонтанно сокращающихся клеток, выделенных из предсердий куриного эмбриона. Рис. 3.20 показывает экспериментальную запись зависимости мембранного потенциала от времени, полученную с помощью введенного в клетку микроэлектрода. Импульс тока длительностью 20 мс подавался через тот же электрод, на графике он выглядит как большой пик; эти импульсы приводили к задержке фазы, увеличивая период колебаний ( $T' > T$ ). Периодическое воздействие с различными частото-

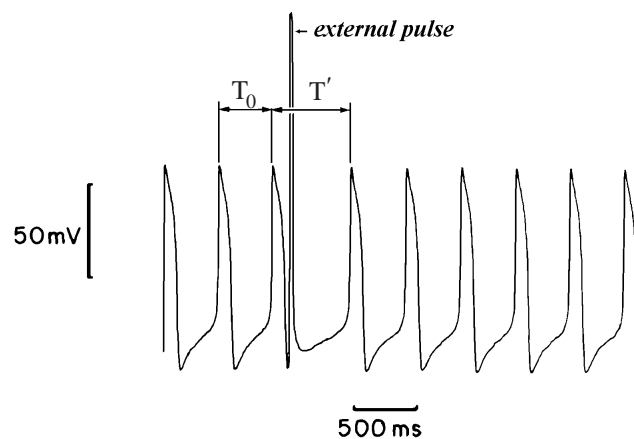


Рис. 3.20. Экспериментальная запись мембранного потенциала спонтанно осциллирующей клетки (из сердца куриного эмбриона) и влияния на него внешнего импульса тока (external pulse). Импульс подается через используемый для измерений электрод, он виден как большой пик на графике, приводящий к переустановке фазы колебаний.  $T_0$  – базовый период, а  $T'$  – возмущенный период. Из [Zeng *et al.* 1990].

тами приводило к устойчивым режимам захвата фазы, показанным на рис. 3.21.

### 3.2.6 Захват фазы и частоты: общий подход

Описанные выше свойства синхронизации типичны для автоколебаний при слабой внешней силе и не зависят от свойств конкретной системы, в частности от того, являются ли колебания квазигармоническими или релаксационными. Они не зависят также и от формы внешней силы, т.е. является ли она гармонической (как предполагалось в разделе 3.1), прямоугольной (как в экспериментальном примере на рис. 3.10) или импульсной (как в примере, представленном на рис. 3.21). В общем случае может наблюдаться синхронизация порядка  $n : m$  с языками Арнольда, подходящими к оси  $\omega$ ; это означает, что синхронизация может наблюдаться при сколь угодно малой силе (рис. 3.19). При больших  $n$  и  $m$  области синхронизации очень узки, так что их не всегда удается наблюдать в эксперименте.

Чтобы рассмотреть синхронизацию высших порядков в рамках общего подхода, переформулируем условие захвата частоты в виде

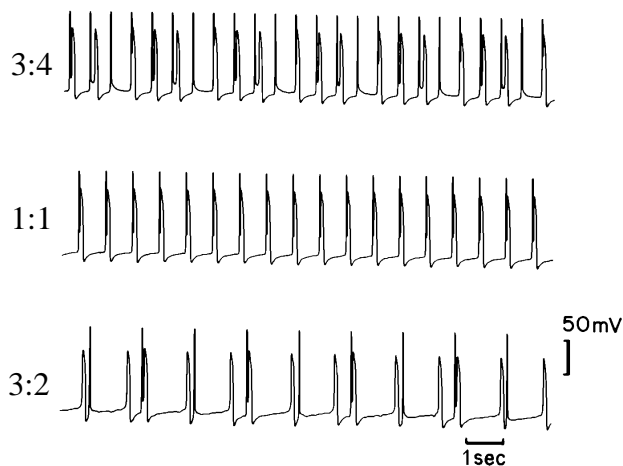


Рис. 3.21. Синхронизация группы клеток предсердий куриного эмбриона периодической последовательностью импульсов. Показаны режимы синхронизации порядка  $3 : 4$ ,  $1 : 1$  и  $3 : 2$  при периодах стимуляции  $T = 0.6$  с,  $T = 0.78$  с и  $T = 1.52$  с, соответственно. Все ритмы анализировались по прошествии достаточно длительного времени с начала стимуляции, чтобы переходные процессы прошли и установились стационарные устойчивые колебания. Из работы [Zeng *et al.* 1990], где представлены также режимы с другими значениями  $n : m$ .

$$n\omega = m\Omega. \tag{3.2}$$

Условие захвата фазы (уравнение (3.1)) также должно быть переформулировано для случая синхронизации порядка  $n : m$ . В качестве первого шага отметим, что разность фаз в синхронном режиме не обязательно постоянна, но может колебаться вокруг некоторого значения. Например, рассмотрим снова случай синхронизации  $1 : 1$  последовательностью импульсов (рис. 3.17b) и построим графики фазы автоколебаний, фазы внешней силы и их разности (рис. 3.22). Мы видим, что разность фаз ограничена, но не постоянна. Это наблюдается не только при импульсном воздействии; так, например, разность фаз в общем случае будет колебаться, если движение по циклу неравномерно (или неравномерен рост фазы силы). Теперь, имея в виду возможность синхронизации порядка  $n : m$ , переформулируем условие захвата фаз (3.1) в более общем виде

$$|n\phi_e - m\phi| < \text{constant}. \tag{3.3}$$

Таким образом, существенно, что разность фаз  $n\phi_e - m\phi$  остается *ограниченной*, что эквивалентно условию захвата частоты (3.2).

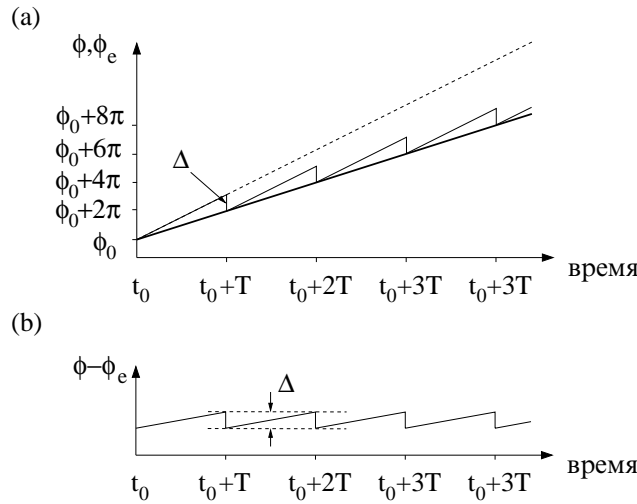


Рис. 3.22. Разность фаз в синхронном режиме не обязательно постоянна. (а) Фаза внешней силы  $\phi_e$  растет линейно (жирная линия), а фаза автоколебаний под действием периодических толчков  $\phi$  растет линейно между толчками (сплошная линия) и мгновенно переустанавливается  $\phi \rightarrow \phi - \Delta$  при каждом импульсе. Фаза автономных автоколебаний росла бы как показано штриховой линией. (б) Разность фаз  $\phi - \phi_e$  ограничена и колеблется.

## 3.2.7 Пример: синхронизация лазера

Simonet *et al.* [1994] экспериментально и теоретически исследовали явления захвата частоты в рубиновом лазере на ядерном магнитном резонансе с задержанной обратной связью. Этот объект идеально подходит для изучения синхронизации, ввиду высокой стабильности колебаний и большого отношения сигнал/шум. В результате оказалось возможным наблюдать синхронные режимы высоких порядков. Автономный лазер демонстрирует периодические автоколебания интенсивности излучаемого света с частотой  $f_0 \approx 40$  Гц. Внешний периодический сигнал добавлялся в цепь обратной связи. Он был либо синусоидальным, либо имел форму меандра. В обоих случаях наблюдались синхронные состояния разных порядков.

Захваченные режимы идентифицировались по графикам интенсивности излучения как функции внешнего сигнала  $V$ . Автоколебания считались захваченными, если существовала устойчивая фигура Лиссажу (рис. 3.23, ср. с рис. 3.9). Языки Арнольда для вынужденных автоколебаний лазера показаны на рис. 3.24. Отметим, что языки высших порядков очень узки – в пределах экспериментального разрешения они выглядят как линии.

Представленный пример еще раз показывает, что свойства синхронизации слабо возмущенных автоколебаний универсальны и не зависят ни от свойств автоколебаний, ни от формы силы. Последняя может быть либо последовательностью импульсов, как при теоретическом рассмотрении выше, либо синусоидальной, либо иметь

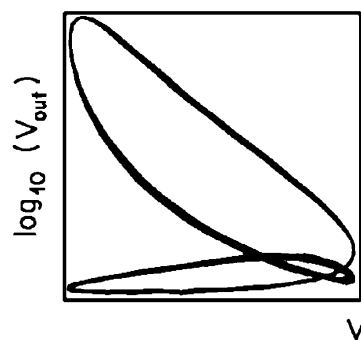


Рис. 3.23. Интенсивность излучения лазера  $\log V_{\text{out}}$  как функция от внешнего сигнала  $V$ . Замкнутая кривая (фигура Лиссажу) указывает, что период автоколебаний равен в точности двум периодам сигнала (внешней силы), т.е. имеет место синхронизация 1 : 2 (ср. с рис. 3.9). Из Simonet *et al.*, *Physical Review E*, Vol. 50, 1994, pp. 3383–3391. Copyright 1994 by the American Physical Society.

форму меандра, как в эксперименте с лазером. В любом случае наблюдается семейство языков Арнольда, касающихся оси частот. С другой стороны, свойства синхронизации при средней и большой силе не универсальны. Например, в эксперименте с лазером язык  $1:2$  расщепляется на два (рис. 3.24).

### 3.3 Особенности синхронизации релаксационных автоколебаний

В этом разделе мы опишем свойства синхронизации релаксационных осцилляторов типа накопление–сброс, введенных в разделе 2.4.2. Мы остановимся на трех способах воздействия на эти автоколебания: (i) сброс внешним импульсом, (ii) вариация порога и (iii) вариация собственной частоты, а также приведем экспериментальные примеры.

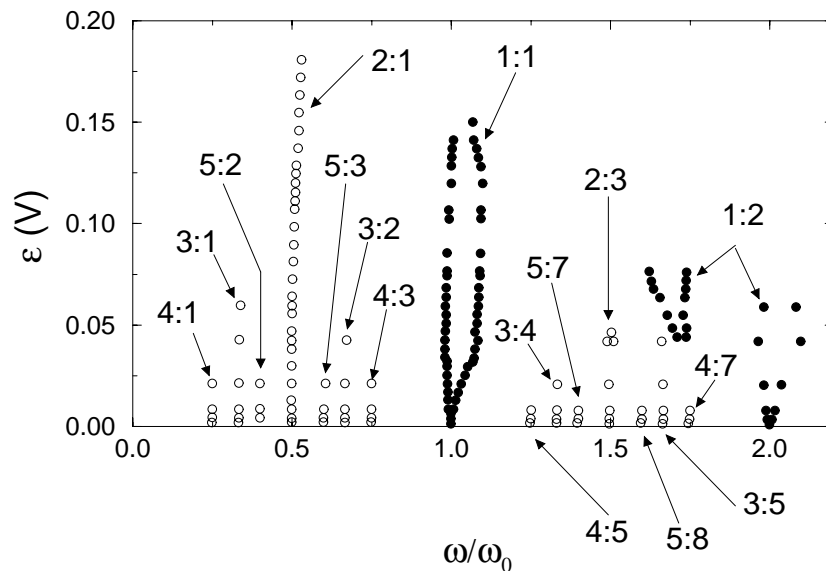


Рис. 3.24. Языки синхронизации для лазера под действием внешней силы с амплитудой  $\varepsilon$  и частотой  $\omega$ . Границы языков порядков  $1:1$  и  $1:2$  показаны символом  $\bullet$ . Языки высших порядков очень узки; в пределах точности эксперимента они выглядят как линии, показанные символом  $\circ$ . Из Simonet *et al.*, *Physical Review E*, Vol. 50, 1994, pp. 3383–3391. Copyright 1994 by the American Physical Society.

### 3.3.1 Сброс внешним импульсом. Пример: кардиостимулятор

Используем снова простую модель из раздела 2.4.2 (см. рис. 2.12), но теперь введем в нее внешнюю силу. Представим, что наполненные жидкостью сосуды движутся по конвейеру и опрокидываются в резервуар осциллятора (рис. 3.25а). Таким образом, определенное количество жидкости добавляется в систему с частотой  $\omega$ , зависящей от скорости конвейера. Предполагая, что вода добавляется практически мгновенно, мы можем рассматривать силу как периодическую последовательность импульсов; их амплитуда соответствует количеству добавляемой воды. Для простоты мы предположим, что и сброс происходит мгновенно, что типично для осцилляторов «накопление–сброс».

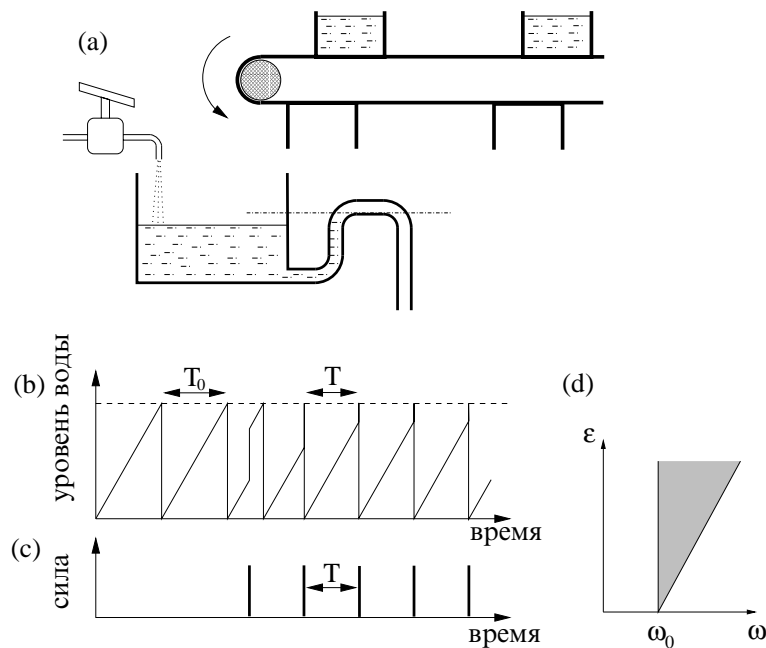


Рис. 3.25. (а) Действие импульсной силы на осциллятор «накопление–сброс». По конвейеру доставляется вода, которая периодически добавляется в сосуд. (б) Автономный осциллятор с периодом  $T_0$  синхронизуется  $T$ -периодической последовательностью импульсов, показанной на рис. (с). Каждый импульс означает мгновенный подъем воды в главном сосуде; поэтому порог достигается раньше, чем в отсутствие силы. Отметим, что синхронизация устанавливается очень быстро, в течение двух циклов. (д) Поскольку сила может только увеличить частоту осциллятора, область синхронизации порядка 1 : 1 асимметрична.

Влияние импульсов на динамику можно легко понять: они уменьшают период колебаний, т.е. непосредственно переустанавливают фазу автоколебаний. Из простого рассмотрения (рис. 3.25) следуют основные свойства синхронизации:

- Дополнительно добавленная вода приводит к более раннему сбросу, т.е. уменьшает период, но не может его увеличить.
- Синхронизация устанавливается очень быстро, в течение нескольких циклов. Отметим, что, если импульс достаточно большой, чтобы вызвать сброс, т.е. его амплитуда выше порога, то синхронизация наступает сразу.

Механизм синхронизации последовательностью импульсов с 1960-х годов используется в устройстве, спасшем множество человеческих жизней – в кардиостимуляторе. В первых моделях как раз использовался периодический сигнал для коррекции аномально редкого сердечного ритма (брадикардии). В таких устройствах электрические импульсы с имплантированного генератора стимулировали водителя сердечного ритма (пейсмекер) первого порядка – синотриальный узел – и вызывали сокращение сердца.<sup>15</sup> Подобные устройства используются также непосредственно после хирургического вмешательства на сердце; они заставляют сердце биться на большей частоте, чем обычно. Такой кардиостимулятор представляет собой внешний генератор, соединенный с сердцем посредством электродов. После улучшения состояния сердца электроды удаляют.

### 3.3.2 Электрическая модель сердца по Ван-дер-Полю и Ван-дер-Марку

Интересный пример представляет собой эксперимент, проведенный Ван-дер-Полем и Ван-дер-Марком [van der Pol and van der Mark 1928]. Вдохновленные высказанной в 1926 г. идеей Ван-дер-Поля о том, что сердце представляет собой релаксационный автогенератор, они сконструировали электрическую модель сердца. Их устройство состояло из трех релаксационных автогенераторов типа рис. 2.14,

<sup>15</sup> Современные кардиостимуляторы – это программируемые адаптивные устройства, использующие сложные алгоритмы для слежения за сердечной деятельностью; они меняют ритм в зависимости от времени суток, физической активности и т.д.



связанных однонаправленно (рис. 3.26). Таким образом, один генератор действовал на другие как внешняя сила.<sup>16</sup>

Устройство содержало дополнительно три переключателя, так что на каждый генератор мог подаваться короткий импульс, моделирующий экстрасистолу. Суммируя импульсы от предсердий и желудочков (рассматривая их в качестве Р- и R-зубцов), Ван-дер-Поль и Ван-дер-Марк моделировали на экране осциллографа электрокардиограмму. По-видимому, этот эксперимент был первым случаем применения нелинейной динамики к биологической проблеме.

Ван-дер-Поль и Ван-дер-Марк изменяли связь между вторым и третьим генераторами (имитируя при этом проводимость между предсердиями и желудочками), начиная с достаточно большой. Действительно, при нормальных сокращениях сердца все три генератора должны быть синхронны; каждый Р-зубец сопровождается R-зубцом. Уменьшая связь, можно моделировать определенную сердечную патологию – блокаду, т.е. нарушение нормальной проводимости сигнала от предсердий к желудочкам. При такой патологии, называемой в наши дни блокадой второго порядка,  $m$  сокращений

<sup>16</sup> Известно, что в норме сокращения сердца вызываются пейсмекером первого порядка (синоатриальным узлом) с собственной частотой около 70 биений в минуту. Если он отказывает, то сокращения вызываются пейсмекером второго порядка (атриовентрикулярным узлом); его частота  $\approx 40$ –60 биений в минуту. Если же проведение возбуждения от предсердий к желудочкам через атриовентрикулярный узел нарушено (полная блокада), то желудочки сокращаются в ритме пейсмекера третьего порядка ( $\approx 30$ –40 биений в минуту) [Шмидт и Тевс 1983]. Таким образом, в нормально функционирующем сердце водителя ритма синхронизованы синоатриальным узлом. Самый быстрый генератор доминирует – это типично для импульсно взаимодействующих релаксационных автогенераторов.

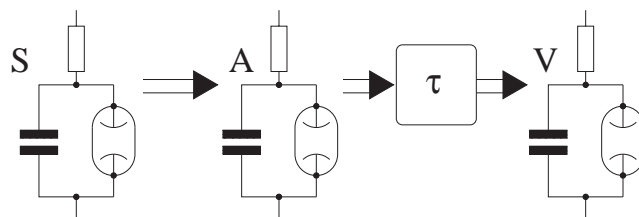


Рис. 3.26. Электрическая модель сердца по Ван-дер-Полю и Ван-дер-Марку. Три однонаправленно связанных релаксационных автогенератора представляют синоатриальный узел (S), предсердия (atria, A) и желудочки (ventricles, V). Задержка сигнала между вторым и третьим генераторами имитирует временную задержку  $\tau$ , с которой сигнал передается от предсердий к желудочкам. Схематически по оригинальной схеме из [van der Pol and van der Mark 1928].

предсердия сопровождаются  $n$  сокращениями желудочка ( $m > n$ ). В электрической модели эта блокада соответствовала синхронизации порядка  $n : m$  второго и третьего генераторов.

Ван-дер-Поль и Ван-дер-Марк отметили, что уменьшение связи можно интерпретировать как уменьшение амплитуды сигнала, стимулирующего желудочки. Если эта амплитуда недостаточна, чтобы запустить третий генератор, то синхронизация порядка  $1 : 1$  нарушается. Тем не менее, импульсы уменьшают период третьего генератора, что делает возможной синхронизацию с  $m > n$ .<sup>17</sup>

### 3.3.3 Вариация порога. Пример: электронный релаксационный автогенератор

Другая возможность воздействовать на генератор «накопление–сброс» заключается в изменении его порога. Основной эффект состоит в том, что увеличение (уменьшение) порога приводит к более длительному (короткому) периоду накопления. Периодически меняя (модулируя) порог, можно синхронизовать релаксационные автоколебания.

Здесь мы опишем механизм, впервые изучавшийся в классических экспериментах Ван-дер-Поля и Ван-дер-Марка [van der Pol and van der Mark 1927]. В их схеме, показанной на рис. 3.27, неоновая лампа не проводит ток, пока приложенное напряжение не достигнет порога  $u_{\text{thresh}}$ . В результате напряжение  $u$  на конденсаторе медленно возрастает, пока по достижении порога конденсатор не разрядится быстро через загоревшуюся лампу, после чего начинается новый цикл. Если в схему вводится переменное напряжение, то разряд происходит при  $u = u_{\text{thresh}} - \varepsilon \sin \omega t$ ; т.е. порог меняется периодически. Рис. 3.28 объясняет, почему при изменении порога происходит синхронизация: если период изменений немного короче (длиннее) собственного периода автономной системы, то порог достигается раньше (позже), и частота автоколебаний подравнивается к частоте силы. Очевидно, что возможна и синхронизация силой с частотой  $\omega \approx m\omega_0$ .

Свойство релаксационных автоколебаний легко и устойчиво синхронизоваться использовалось Ван-дер-Полем и Ван-дер-Марком [1927] для деления частоты. В их эксперименте частота внешней гармонической силы  $\omega$  поддерживалась постоянной, в то время как

<sup>17</sup> Читателей, интересующихся современными подходами к моделированию патологий сердечных ритмов, мы отсылаем к работам [Гласс и Мэки 1988; Guevara 1991; Yehia *et al.* 1999].

емкость конденсатора в автогенераторе увеличивалась. Поначалу частота автоколебаний оставалась постоянной и равной  $\omega$ , затем она

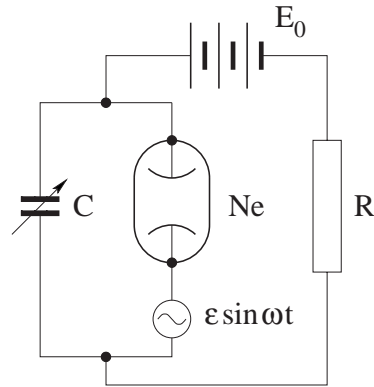


Рис. 3.27. Схема эксперимента с релаксационным автогенератором Ван-дер-Поля и Ван-дер-Марка [1927]. Подаваемое переменное напряжение меняет порог, при котором вспыхивает неоновая лампа и происходит разряд конденсатора.

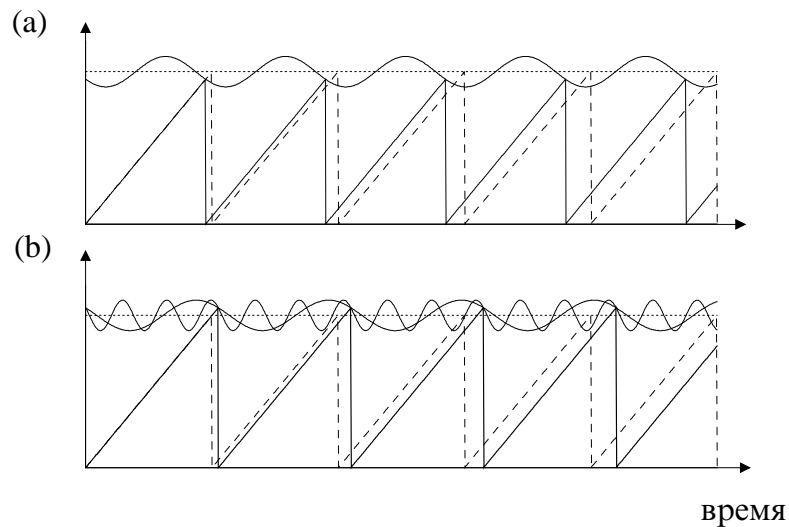


Рис. 3.28. Синхронизация релаксационных автоколебаний путем изменения порога. Порог автономной системы показан пунктиром; автоколебания в автономной системе – штриховой линией. Периодические изменения порога заставляют систему колебаться с частотой этих изменений; при этом частота может сдвигаться как вниз (а), так и вверх (б). Как видно из рис. (б), возможна и синхронизация высшего порядка (в данном случае 1 : 3).

внезапно уменьшалась до  $\omega/2$ . При дальнейшем увеличении емкости частота скачком уменьшалась до  $\omega/3$  и так далее, вплоть до  $\omega/40$  (рис. 3.29). Эти скачки соответствуют переходам между синхронными режимами порядка  $1 : n$  и  $1 : (n + 1)$ . В более поздних экспериментах эти же авторы осуществили деление частоты на 200.

Обратим внимание на интересный факт: Ван-дер-Поль и Ван-дер-Марк отметили, что «прежде, чем частота перескакивала к следующему нижнему значению, в наушниках часто был слышен шум». Этот факт, по-видимому, свидетельствует о первом экспериментальном наблюдении хаотической динамики (см. главу 5).

Другим интересным экспериментальным наблюдением Ван-дер-Поля и Ван-дер-Марка был гистерезис при переходах между соседними синхронными режимами. Это означает, что скачки частоты при переходах  $\omega/9 \leftrightarrow \omega/10$  и  $\omega/10 \leftrightarrow \omega/11$  происходили при различных значениях емкости, в зависимости от того, уменьшалась она или увеличивалась в ходе эксперимента. Это объясняется перекрытием областей синхронизации (см. раздел 7.3.4).

### 3.3.4 Изменение собственной частоты

Другой базовый механизм синхронизации заключается в непосредственном воздействии силы на собственную частоту автоколебаний

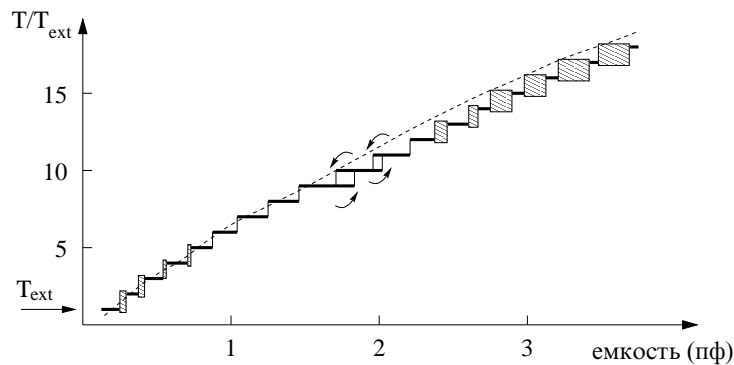


Рис. 3.29. Деление частоты с использованием синхронизации релаксационного автогенератора на неоновой лампе (рис. 3.27). Горизонтальные ступеньки соответствуют захвату частоты порядка  $1 : m$ ; заштрихованные области отвечают значениям емкости, при которых был слышен нерегулярный шум. Штриховая линия показывает частоту колебаний в отсутствие внешней силы. Стрелки обозначают гистерезис при переходах между соседними синхронными состояниями. Из [van der Pol and van der Mark 1927].

$\omega_0$ . В рамках модели «накопление–сброс» это можно представить как периодическое изменение скорости накопления. Действительно, между двумя сбросами в моменты времени  $t_i$  и  $t_{i+1} = t_i + T_0$  уровень воды в сосуде или напряжение на конденсаторе растут линейно по времени

$$x = x_{\text{thresh}} \cdot \frac{t - t_i}{T_0} = x_{\text{thresh}} \cdot \frac{\omega_0 \cdot (t - t_i)}{2\pi},$$

так что скорость роста прямо пропорциональна частоте колебаний.<sup>18</sup> Легко видеть, что сила, меняющая частоту, захватывает колебания. Пусть для простоты скорость роста между двумя сбросами постоянна и определяется значением силы при  $t_i$ , т.е. в точке начала накопления:

$$x = x_{\text{thresh}} \cdot \frac{(\omega_0 + \varepsilon \sin(\omega t_i + \bar{\phi}_e)) \cdot (t - t_i)}{2\pi}.$$

В зависимости от фазы силы  $\omega t_i + \bar{\phi}_e$  в момент времени  $t_i$  частота сброса увеличивается или уменьшается, и поэтому наступает синхронизация.<sup>19</sup>

Интересный режим наблюдается при захвате  $n : 1$  (рис. 3.30). В этом случае период вынужденных колебаний меняется от цикла к циклу (это называется также модуляцией частоты), и «выстрелы» (сбросы) не эквидистантны.

Этот механизм синхронизации может быть важен для понимания функционирования сенсорных нейронов. Такие нейроны реагируют на медленно меняющееся воздействие (т.е. на внешнюю силу) изменением интервала между импульсами; это означает, что интенсивность воздействия кодируется путем модуляции частоты.

Другой пример из физиологии, относящийся к этому типу воздействия, имеет отношение к сердечной деятельности. Действительно, автономная нервная система меняет скорость генераторов «накопление–сброс», образующих водитель ритма первого порядка (синоатриальный узел), что меняет частоту сокращений сердца. Мы вернемся к этим примерам в главе 6.

<sup>18</sup> Отметим, что модель «накопление–сброс» можно интерпретировать и следующим образом: вместо того, чтобы говорить о накоплении некоторой переменной  $x$  до достижения ею порога  $x_{\text{thresh}}$ , можно рассматривать «накопление» фазы до достижения ею значения  $2\pi$ . Или же можно говорить о том, что интегрируется мгновенная частота  $d\phi/dt$ . Таким образом можно свести систему к *фазовому осциллятору*.

<sup>19</sup> Простое рассмотрение величины  $\omega = \omega_0 + \varepsilon \sin(\omega t_i + \bar{\phi}_e)$  дает условие 1 : 1-синхронизации в виде  $|\omega_0 - \omega| \leq \varepsilon$  и величину постоянного сдвига фазы в синхронном режиме  $\sin^{-1}((\omega - \omega_0)/\varepsilon)$ .

## 3.3.5 Модуляция и синхронизация

Здесь мы хотим подчеркнуть важное различие между синхронизацией и модуляцией. Отметим, что в случае захвата порядка  $n : 1$  сила действует на колебания двояко:

- (i) она приводит к *модуляции* периода колебаний с периодом силы;
- (ii) она приводит к сдвигу среднего периода колебаний, так что  $m \cdot \langle T_i \rangle = T$ , т.е. к *синхронизации*.

Эти явления различны, хотя могут и сосуществовать. Действительно, возможна синхронизация без модуляции (например, захват частоты порядка  $1 : 1$ ), или же комбинация обоих эффектов, как показано на рис. 3.30.

Вообще говоря, модуляция без синхронизации наблюдается, если сила влияет на колебания, но не может подстроить их частоту. Такая ситуация возникает, например, если сила воздействует не на сам осциллятор, а лишь на распространение колебательного сигнала по некоторому каналу. В качестве примера (несколько искусственного), рассмотрим сокращения сердца. Их можно характеризовать пульсом, измеряемым, скажем, на запястье. Если скорость распространения по сосудам меняется (например, в результате изменений давления), то некоторые импульсы распространяются быстрее, а некоторые отстают, и в результате наблюдается модуляция цепочки импульсов. Но число импульсов, т.е. средняя частота сердцебиений, при этом не меняется, так что синхронизация таким воздействием

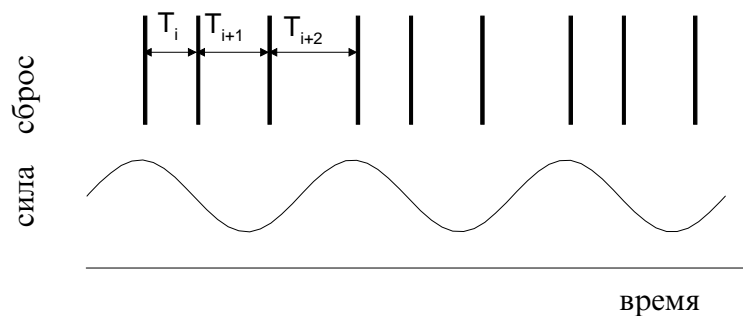


Рис. 3.30. Синхронизация автогенератора «накопление–сброс» путем вариации его собственной частоты. Показан режим захвата  $3 : 1$ ; на одном периоде силы происходит три сброса. Отметим, что период захваченного автогенератора модулируется силой,  $T_i < T_{i+1} < T_{i+2}$ , и интервалы между сбросами не одинаковы.

невозможна. Различие между синхронизацией и фазовой модуляцией иллюстрируется на рис. 3.31.

### 3.3.6 Пример: синхронизация песен сверчков

В конкретном эксперименте не всегда возможно выявить точный механизм действия силы. В общем случае воздействие может иметь комбинированный вид. Поэтому в последующем примере, как и в примерах следующего раздела, мы не обсуждаем механизм действия силы, а делаем основной акцент на общих свойствах синхронизации.

Сверчок (*Oecanthus fultoni* или snowy tree cricket) – это широко распространенный в Соединенных Штатах вид насекомых. Эти насекомые способны синхронизовать издаваемые ими звуки, реагируя на стрекотание своих соседей. Песня сверчка – это продолжительная последовательность коротких звуков (стрекотаний), которые возникают, когда самец поднимает специальные подкрылья и трет их друг о друга. Каждый стрекот состоит из 2–11 импульсов, соответствующих складыванию крыльев. Ритм стрекотания очень регулярен в хоре; обычно это наблюдается и для одиночных певцов [Walker 1969].

Чтобы исследовать механизм акустической синхронности сверчков, Walker [1969] провел следующие эксперименты. Он записал один стрекот и затем непрерывно воспроизводил его самцам, поющим на насестах в изолированных стеклянных цилиндрах. Тестовые звуки транслировались с интенсивностью, близкой к естественной, и с различной частотой. Акустический ответ подопытного сверчка записы-

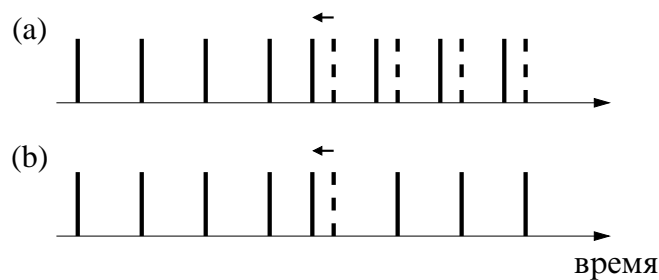


Рис. 3.31. Отличие синхронизация от модуляции. (а) Если импульс появляется через фиксированный промежуток времени после предыдущего, то, сдвинув один импульс, мы сдвигаем и все последующие. В этом случае сила влияет на частоту последовательности и синхронизирует ее. (б) Если же сдвиг одного импульса не влияет на последующие, то частота последовательности измениться не может. В этом случае сила может только модулировать последовательность, но не синхронизовать ее.

вался на пленку для последующего анализа. Таким образом, сверчок подвергался периодическому внешнему воздействию.

Основной результат этих исследований показан схематически на рис. 3.32. Можно видеть, как синхронизация возникает вслед за появлением внешних стрекотаний. Для диаграммы, показанной на рис. 3.32а, их частота была 242 стрекота в минуту, а частота стрекотания сверчка до трансляции была 185. Как и ожидалось, фаза ритма, который был изначально медленнее, запаздывает по отношению к фазе более быстрого искусственного ритма. Соответственно, если изначальная частота стрекотаний была 192, а частота трансляции – 166 в минуту, то сверчок опережал по фазе синхронизирующий сигнал (рис. 3.32b). Наконец, синхронизация порядка 1 : 2 (два искусственных стрекота на один естественный), также возможна, как можно видеть из рис. 3.32с.

Как это характерно для релаксационных осцилляторов, сверчок способен очень быстро подстроить свое пение к подобному. Удлиняя или укорачивая собственный период в ответ на предыдущий стрекот, насекомое способно достичь синхронности в течение двух циклов.

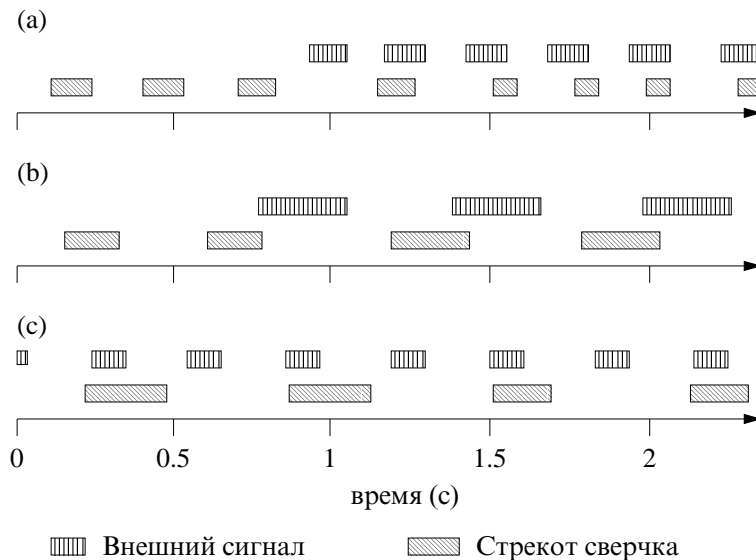


Рис. 3.32. Синхронизация стрекотания сверчка. Левая часть графиков (а) и (b) показывает свободное, без внешнего воздействия, пение. Звук, издаваемые подопытным сверчком, захватываются более быстрым (а) или более медленным (b) искусственным ритмом. Пример захвата порядка 1 : 2 показан в (с). Нарисовано схематически с использованием данных из [Walker 1969].



### 3.4 Синхронизация в присутствии шума

Автоколебательные системы представляют собой идеализацию встречающихся в природе осцилляторов. В этих моделях пренебрегается флуктуациями макроскопических параметров и считается, что осцилляторы изолированы от окружающей среды. В действительности же в реальных системах всегда присутствуют тепловые флуктуации; часто эти системы подвергаются слабым нерегулярным внешним воздействиям. Обычно все эти факторы нельзя учесть точно, поэтому естественные флуктуации и влияние внешних источников моделируется неким случайным процессом, или шумом.

В этом разделе мы рассмотрим захват частоты автоколебаний внешней силой при наличии шума. С этой целью мы сначала обсудим, как шум влияет на автономные автоколебания – основным эффектом здесь будет диффузия фазы.

#### 3.4.1 Диффузия фазы в автоколебаниях с шумом

Как и в разделе 3.1, мы будем рассматривать осциллятор во вращающейся системе отсчета, используя для описания динамики фазы модель легкой частицы в вязкой жидкости. В отсутствие шума фазовая точка находится в состоянии равновесия в произвольной точке на цикле (пока мы рассматриваем ситуацию без внешней силы!), и мы знаем, что, по отношению к сдвигам фазы, это положение равновесия нейтрально устойчиво (см. рис. 2.3 и 2.4с). Поэтому даже очень слабый шум, действуя на фазу, сдвигает ее взад-вперед. В результате движение фазовой точки во вращающейся системе отсчета можно рассматривать как *случайное блуждание*.

Важно иметь в виду, что даже малые смещения фазы накапливаются, поскольку возмущения фазы не растут и не уменьшаются. В результате фаза может сильно отклоняться от линейной функции времени  $\phi = \omega_0 t + \phi_0$ , которая наблюдалась бы в отсутствие шума. Ввиду аналогии с диффузией броуновской частицы, подвергающейся случайным ударам со стороны молекул жидкости, часто говорят о **диффузии фазы**.<sup>20</sup> Для иллюстрации динамики фазы в присутствии шума мы приводим график фазы дыхания человека (рис. 3.33).

Из-за шума период колебаний не постоянен. Тем не менее, в среднем отклонения в положительном и отрицательном направлении компенсируют друг друга, и средний период  $\langle T \rangle$ , вычисленный по

<sup>20</sup> В отличие от блужданий броуновской частицы блуждания фазы одномерны (вдоль цикла).

числу циклов за большой интервал времени, совпадает с периодом колебаний в отсутствие шума  $T_0$ .<sup>21</sup> Соответственно, средняя частота равна  $\omega_0$ .

### 3.4.2 Автоколебания с шумом и внешней силой. Проскоки фазы

Рассмотрим сначала слабую внешнюю силу с частотой  $\omega = \omega_0$  (т.е. будем считать расстройку равной нулю). В результате такого воздействия частица блуждает не по горизонтальной поверхности, а по  $2\pi$ -периодическому потенциальному рельефу (рис. 3.34, ср. также с рис. 3.3b), и мы имеем дело с двумя противоположными тенденциями: сила стремится удержать частицу в минимуме потенциала, а шум выбивает частицу из него. Результат противодействия этих эффектов зависит от интенсивности и от распределения шума. Если шум слабый и *ограниченный*, то он не может перебросить частицу через потенциальный барьер, и она флуктуирует вокруг устойчивого

<sup>21</sup> Мы предполагаем, что шум симметричный, т.е. он сдвигает фазу вперед и назад с равной вероятностью, так что случайные блуждания происходят без сноса. Если это не так, то шум сдвигает среднюю частоту  $\langle \omega_0 \rangle$ .

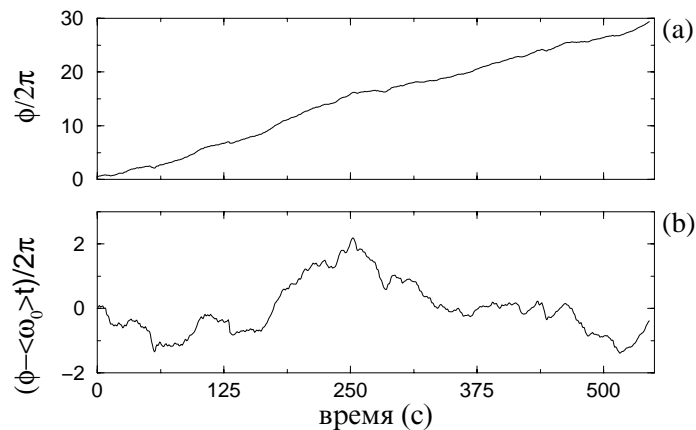


Рис. 3.33. Случайные блуждания фазы дыхания. Дыхание человека управляется генератором ритма, расположенном в стволе мозга. Конечно, эту систему нельзя рассматривать как идеальный автогенератор без шума. Фаза дыхания определялась по записи потока воздуха через нос, измерявшегося термистором. Из-за шума фаза не растет линейно (а), а совершает случайные блуждания. Более наглядно изображение отклонения фазы от линейного роста  $\langle \omega_0 \rangle t$  (b). Отметим, что эти отклонения не малы по сравнению с  $2\pi$ .

состояния равновесия – минимума потенциала. Если шум достаточно сильный, или если он *неограниченный* (например, гауссовский), то частица время от времени перепрыгивает через потенциальный барьер и довольно быстро приходит в соседнее состояние равновесия  $\phi^0 \pm 2\pi$ . Физически это означает, что фазовая точка совершает дополнительный, по сравнению с внешней силой, оборот вдоль предельного цикла (или совершает на один оборот меньше). Эти относительно быстрые изменения разности фаз на  $2\pi$  называют *проскоками фазы*.<sup>22</sup>

Ситуация качественно меняется, если частота силы отличается от частоты автоколебаний. В этом случае потенциал не горизонтальный, а наклонный (ср. с рис. 3.5а). Снова можно различить два случая. Если проскоки невозможны (т.е. шум ограниченный и слабый), то фаза флуктуирует вокруг постоянного значения (рис. 3.35). В другом случае, когда шум сильный или неограниченный, наблюдаются проскоки фазы. Однако вероятности проскоков направо и налево теперь различны: естественно, частица более часто скачет вниз, чем вверх (рис. 3.36). Поэтому, хотя большую часть времени частица флуктуирует вокруг состояния равновесия, в среднем она соскальзывает вниз по потенциалу. Поэтому динамика фазы существенно неоднородна (по крайней мере, при слабом шуме): долгие интервалы синхронизации перемежаются проскоками фазы.

#### Свойства синхронизации шумовых автоколебаний

Здесь мы обсудим, как можно охарактеризовать синхронизацию шумовых автоколебаний и в какой степени к этой ситуации примени-

<sup>22</sup> В действительности, если шум достаточно сильный, то несколько скачков могут следовать непосредственно друг за другом, так что возможен проскок также и на  $\pm 4\pi$  и т.д.

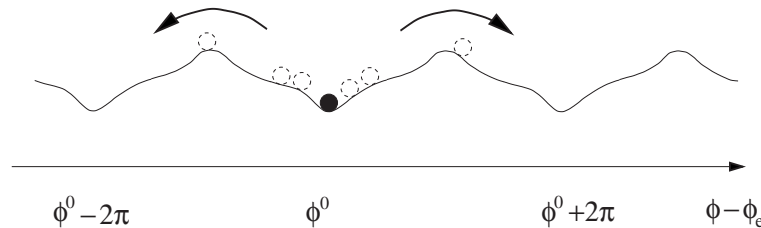


Рис. 3.34. Диффузия фазы для автоколебаний, на которые действует внешняя сила с нулевой расстройкой: фазовая точка колеблется вокруг устойчивого состояния равновесия  $\phi - \phi_e = \phi^0$  и иногда перескакивает к эквивалентному состоянию  $\phi^0 \pm 2\pi k$ .

мы понятия захвата частоты и фазы. Действительно, в некоторых приведенных выше экспериментальных примерах мы видели, что идеального совпадения с теорией не наблюдается, ввиду присутствия шума. При рассмотрении этих неидеальностей будем различать два случая: (i) слабый ограниченный шум и (ii) неограниченный или сильный ограниченный шум.

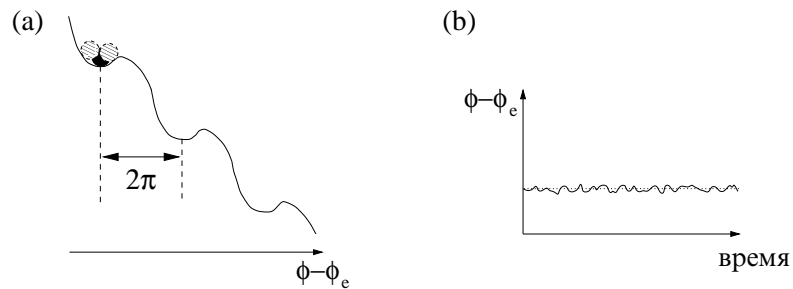


Рис. 3.35. Динамика фазы вынуждаемых автоколебаний в присутствии слабого ограниченного шума. (а) Частица колеблется вокруг устойчивого состояния равновесия, но не может выйти из окрестности минимума потенциала. Соответственно, разность фаз флуктуирует вокруг постоянного значения (пунктир), которое она бы принимала в отсутствие шума (b).

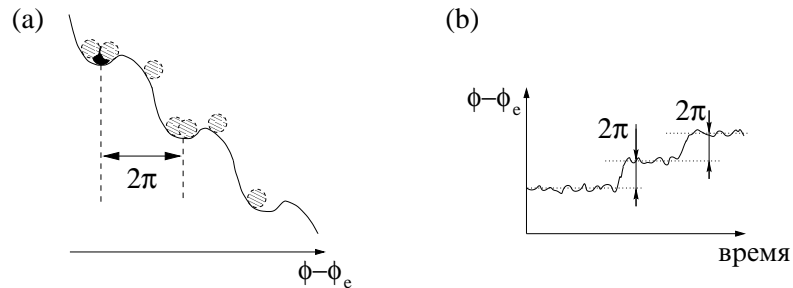


Рис. 3.36. Фазовая динамика вынуждаемых автоколебаний с неограниченным шумом. (а) Частица колеблется вокруг устойчивого состояния равновесия  $\phi^0$ , но иногда перескакивает к эквивалентному состоянию  $\phi^0 \pm 2\pi k$ . Хотя возможны скачки в обоих направлениях, частица чаще перескакивает через более низкий барьер, т.е. вниз. Эти скачки (проскоки фазы) четко видны на рис. (b). Зависимость разности фаз от времени напоминает динамику фазы при автоколебаниях без шума в случае перехода к синхронизации (см. кривую 3 на рис. 3.8b), но при наличии шума проскоки происходят нерегулярно.

*Слабый ограниченный шум*

Если расстройка мала, то такой шум не приводит к проскокам. Другими словами, шум не может перебросить частицу из одного минимума потенциала в другой (рис. 3.35). В этом случае разность фаз в присутствии шума флуктуирует случайным образом, но остается ограниченной, и условие захвата фазы (3.3) по-прежнему справедливо. Средняя частота  $\Omega$  шумовых автоколебаний также захвачена силой. При большей расстройке интенсивность шума становится достаточной для того, чтобы преодолеть потенциальный барьер, и частица начинает соскальзывать вниз. Отметим, что переход происходит при меньшей расстройке, чем в отсутствие шума (рис. 3.37а). Подчеркнем, что в рассматриваемом случае область синхронизации не доходит до оси  $\omega$ : слабая сила не может удержать частицу в потенциальной яме.

*Неограниченный или сильный шум*

Если шум неограниченный (например, гауссовский), или ограниченный, но сильный, то происходят проскоки фазы. Если потенциал наклонен, то скачки вниз происходят более часто, и в среднем разность

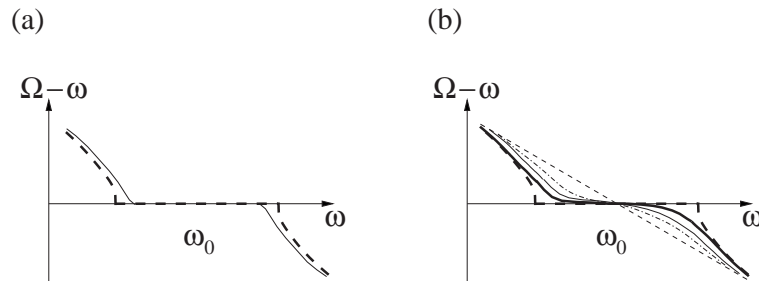


Рис. 3.37. График разность наблюдаемых частот – расстройка для автоколебаний с шумом. (а) При слабом ограниченном шуме существует диапазон расстроек, при которых частота автоколебаний  $\Omega$  в точности равна частоте силы  $\omega$ . Эта область (сплошная линия) меньше, чем в отсутствие шума (жирная штриховая линия). (б) При неограниченном шуме частоты  $\Omega$  и  $\omega$  совпадают только в одной точке, а не на конечном интервале. Если шум очень слабый (жирная линия), то можно говорить о примерном равенстве частот в некотором интервале расстроек  $\omega - \omega_0$ . При более сильном шуме (сплошная и штрих-пунктирная линии) этот интервал исчезает. Строго говоря, синхронизация проявляется только как тенденция: внешняя сила подтягивает частоту автоколебаний к своей частоте, но шум препятствует идеальному захвату. Очень сильный шум полностью разрушает синхронизацию (штриховая линия). Жирная штриховая линия соответствует синхронизации в отсутствие шума.

фаз растет при сколь угодно слабой расстройке. Это важный момент: строго говоря, неограниченный шум разрушает синхронизацию, так что ни условие захвата фазы, ни условие захвата частоты, сформулированные для детерминированного случая, не выполняются. Тем не менее, по крайней мере при слабом шуме, можно говорить о приближенном равенстве частот в некотором диапазоне расстроек (рис. 3.37b). С ростом интенсивности шума этот диапазон уменьшается, и синхронизация проявляется как слабое «подтягивание» наблюдаемой частоты  $\Omega$  к частоте внешней силы  $\omega$ . Другими словами, частоты стремятся подстроиться, но, за исключением одной точки, идеального совпадения не происходит.

Обсудим теперь соотношение между фазами автоколебаний и силы. Мы уже отмечали, что разность фаз  $\phi - \phi_e$  может быть сколь угодно большой вследствие диффузии фазы (если только шум не является ограниченным и слабым). Таким образом, для шумовых систем, вообще говоря, нельзя говорить о захвате фазы, поскольку разность фаз не ограничена. С другой стороны, частица чаще находится

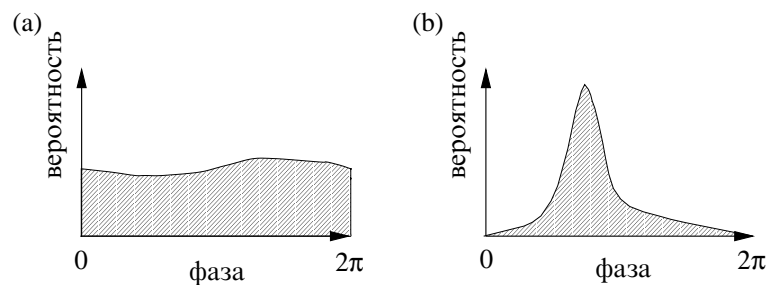


Рис. 3.38. Широкое (a) и сосредоточенное (b) распределения разности фаз для шумовых автоколебаний, в отсутствие и в присутствии внешней силы, соответственно. Если сила отсутствует, то разность фаз может принимать любое значение с равной вероятностью, вследствие диффузии фазы (a). Внешняя сила, приводя к появлению минимума потенциала, делает определенное значение разности фаз более вероятным (b). Схожие распределения получаются при стробоскопическом наблюдении фазы автоколебаний с периодом внешней силы. При таком наблюдении фаза захваченных автоколебаний без шума всегда обнаруживается в одном положении (см. рис. 3.13); шум уширяет распределение, но максимум, служащий индикатором синхронизации, сохраняется (см. также экспериментальный пример на рис. 3.15). Распределение, схожее с (b), наблюдается также в отсутствие синхронизации, если фаза процесса модулируется.

в минимуме потенциала,<sup>23</sup> и поэтому определенные значения  $\phi - \phi_e$  наблюдаются с большей вероятностью. Если рассмотреть разность фаз на окружности  $[0, 2\pi]$ <sup>24</sup> и построить плотность распределения фазы, то мы увидим, что она не равномерна, а имеет выраженный максимум (рис. 3.38). Положение максимума отвечает разности фаз, которая наблюдалась бы в отсутствие шума. Шум уширяет пик, но максимум все же виден. Существование предпочтительного значения разности фаз  $\phi - \phi_e$  можно интерпретировать как статистический аналог захвата фаз. Отметим, однако, что похожее распределение фаз наблюдается и в автоколебаниях без шума, вблизи перехода от синхронизации, когда динамика фазы – перемежающаяся (см. кривые 3 и 4 на рис. 3.8), а также в случае модуляции, когда синхронизация отсутствует (см. раздел 3.3.4).

### 3.4.3 Пример: захват дыхания при механической вентиляции

Для иллюстрации вернемся к эксперименту [Graves *et al.* 1986] (см. раздел 3.1.4), в котором определялась область синхронизации при механической вентиляции легких. (рис. 3.39). В этом случае нельзя однозначно определить границу области синхронизации. Более того, при очень малых амплитудах силы синхронизация невозможна: сила слишком слаба, чтобы преодолеть действие шума.

### 3.4.4 Пример: захват сердечного ритма слабым внешним стимулом

Другой пример синхронизации шумовых автоколебаний периодической внешней силой описан Анищенко и др. [Anishchenko *et al.* 2000]. В этой работе исследовался захват сердечного ритма человека слабым периодическим сигналом. В ходе эксперимента испытуемые находились в покое перед экраном монитора, в то время как компьютер периодически генерировал акустические и визуальные сигналы – одновременно со звуковыми импульсами на экране появлялись цветные квадраты.

<sup>23</sup> Сила старается удержать частоту в определенном положении и поэтому подавляет диффузию; в случае слабого ограниченного шума диффузия полностью исчезает.

<sup>24</sup> Другими словами, мы рассматриваем разные состояния равновесия как эквивалентные и вычисляем разность фаз по модулю  $2\pi$ :  $(\phi - \phi_e) \bmod 2\pi$ .

Отклик на воздействие определялся по кардиограмме, снимаемой стандартным образом. Хорошо известно, что каждый нормальный сердечный цикл содержит очень острый, хорошо выделенный пик, называемый R-зубцом (см. для иллюстрации рис. 6.1); интервал между соседними R-пиками обычно берется в качестве интервала между сердцебиениями. Естественно, что сокращения сердца – далеко не периодические автоколебания,<sup>25</sup> и легко видеть, что интервалы между биениями существенно меняются со временем; эта переменность хорошо известна в физиологии. Поэтому можно говорить только о среднем периоде и частоте сокращений сердца. Чтобы оценить среднюю частоту  $F$ , достаточно подсчитать число  $n$  R-пиков за определенный интервал времени  $\tau$  и найти  $F = n/\tau$ .

В описываемых экспериментах сначала определялась частота  $f_0$  сердечного ритма испытуемого *без воздействия*. Затем испытуемый подвергался внешней стимуляции с различными частотами  $f$ . В течение 10 минут частота  $f$  поддерживалась постоянной, но она изменялась в пределах  $0.75f_0$ – $1.25f_0$  от одного испытания до другого.

<sup>25</sup> Существуют различные точки зрения на природу нерегулярности сердечного ритма – шум это или хаос вместе с шумом; в последующем мы покажем, что этот аспект не влияет на свойства синхронизации.

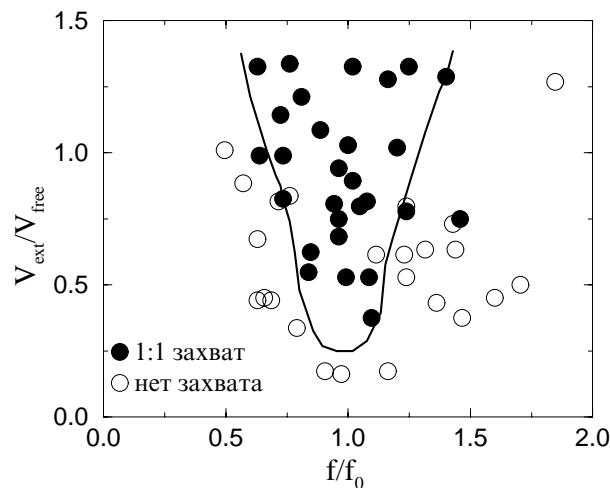


Рис. 3.39. Область 1 : 1 синхронизации спонтанного дыхания аппаратом искусственного дыхания, определенная по данным от семи испытуемых. Сила воздействия характеризуется дыхательным объемом  $V_{ex}$ . Оси частоты и объема нормированы на среднюю «свободную» частоту и на объем дыхания каждого испытуемого, соответственно. Граница области синхронизации проведена произвольно. Из [Graves *et al.* 1986].



В результате были получены кривые разность наблюдаемых частот – расстройка; для одного из испытуемых она показана на рис. 3.40. Полка вблизи  $f \approx f_0$ , хотя и не идеально горизонтальная, указывает на захват частоты. Отметим, что воздействие в этих экспериментах было действительно слабым: специально проверялось, что воздействие без расстройки (т.е. с  $f = f_0$ ) не меняло сердечный ритм и другие важные характеристики, такие как давление крови и ударный объем.

### 3.5 Различные примеры

В этом разделе мы приведем несколько примеров синхронизации в живых системах.

#### 3.5.1 Циркадные ритмы

Поведение людей и животных подчиняется точному 24-часовому ритму покоя и активности, сна и бодрствования. Этот ритм, называемый циркадным, является результатом адаптации организмов ко внешнему воздействию – циклу смены дня и ночи (см. [Aschoff *et al.* 1982; Moore 1999; Sassone-Corsi 1999] и приведенные там ссылки). Поведенческий цикл сопровождается суточными колебаниями выде-

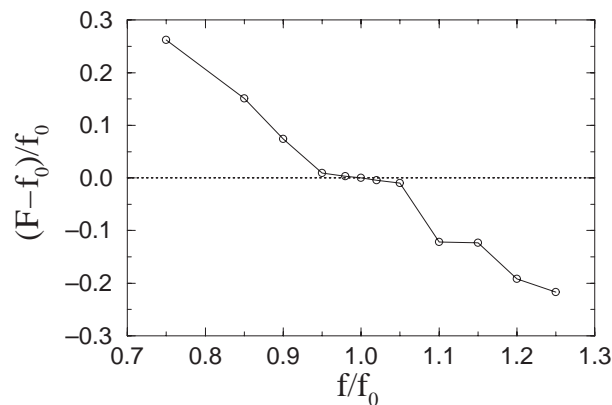


Рис. 3.40. Наблюдаемая средняя частота  $F$  сердечного ритма как функция частоты  $f$  слабого внешнего стимула. Эта экспериментальная кривая соответствует кривой зависимости разности частот от расстройки для шумовых автоколебаний с внешней силой (ср. с рис. 3.37). Из [Anishchenko *et al.* 2000].

ляемых гормонов, внутренней температуры тела, числа лимфоцитов и других важных физиологических параметров.

Хорошо известно, что в отсутствие смены дня и ночи период циркадного ритма отличается от 24 часов; он может быть как длиннее, так и короче. При нормальных условиях, этот цикл захватывается суточными колебаниями освещенности. Этот захват изучался в многочисленных экспериментах, в которых испытуемые находились при постоянной освещенности и были лишены возможности следить за временем. Результаты этих экспериментов схематически представлены на рис. 3.41. Они доказывают, что циркадный ритм имеет внутреннюю природу, т.е. существуют внутренние часы, управляющие этим ритмом. Имеющиеся данные указывают на существование одного главного источника циркадного ритма у млекопитающих – это супрахиазматическое ядро гипоталамуса. Это ядро получает внешний сигнал от клеток ганглия сетчатки [Moore 1999].

При количественном описании циркадного ритма у людей были получены противоречивые результаты [Czeisler *et al.* 1999; Sassone-Corsi 1999; Moore 1999]: для среднего значения периода получались данные от 23 до 25 часов, с индивидуальными вариациями от 13 до 65 часов для нормальных испытуемых. Такие большие вариации, возможно,

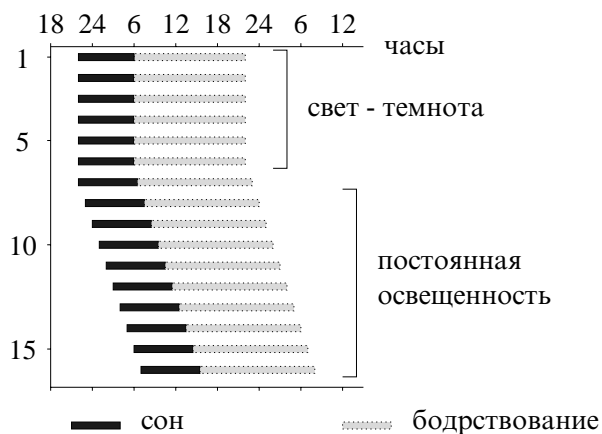


Рис. 3.41. Схематическое представление суточного поведенческого ритма. Циркадный ритм захвачен внешней сменой освещенности в течение первых пяти дней, в дальнейшем запись продолжалась в условиях постоянной освещенности. В данном случае циркадный осциллятор имеет период более 24 часов. Соответственно, разность фаз между циклами сон-бодрствование и день-ночь растет: внутренний «день» начинается все позже и позже. Подобные графики были получены в экспериментах как с животными, так и с людьми [Aschoff *et al.* 1982; Czeisler *et al.* 1986; Moore 1999].

ответственны за существование двух типов людей – «жаворонков» и «сов». Действительно, исходя из общих свойств синхронизации, можно ожидать, что испытуемые с внутренним периодом  $T_0 < 24$  ч будут опережать по фазе внешнюю силу, а те, у кого  $T_0 > 24$  ч, будут отставать по фазе. Аналогично, связанное с возрастом укорочение внутреннего периода, возможно, ответственно за сдвиг циркадной фазы и раннее просыпание, часто наблюдаемое у пожилых людей (см. [Czeisler *et al.* 1999] и приводимые там ссылки). Отметим, что сдвиг фазы зависит не только от расстройки, но и от того, является ли осциллятор квазигармоническим или релаксационным. Вполне возможно, что возрастные изменения циркадного генератора связаны и с этим.

В недавних экспериментах [Czeisler *et al.* 1999] была сделана попытка точно определить внутренний период генератора циркадного ритма у людей. Для этого использовался так называемый «протокол вынужденного асинхронизма»: интервалы сна и бодрствования каждого испытуемого составляли 28-часовые «сутки». (Czeisler *et al.* [1999] предполагали, что этот метод лучше предыдущих, поскольку изоляция в условиях постоянной освещенности влияет на нормальную активность генератора.) Таким образом в эксперименте добивались квазипериодического режима: 4-часовая расстройка слишком велика и внутренний генератор не захватывается внешней силой. В этом режиме записи физиологических параметров (внутренней температуры тела, содержания мелатонина и кортизола в плазме) представляют собой смесь колебаний с периодом силы (28 часов) и неизвестным периодом  $T$ . Анализируя такой сигнал с помощью специального спектрального метода, можно точно определить неизвестный период; он и интерпретируется как внутренний период генератора. Однако эта интерпретация сомнительна. Действительно, вне области синхронизации при увеличении расстройки наблюдаемый период колебаний постепенно приближается к периоду автономных автоколебаний, но они не совпадают (см. рис. 3.7а). Ниоткуда не следует, что эта разность должна быть мала.

Отметим, что в отличие от других примеров, внешнее воздействие на циркадный генератор не строго периодически: некоторые дни солнечные, некоторые нет, так что суточный цикл меняется день ото дня. Поэтому силу следует рассматривать как шумовую, хотя и с сильно выраженной периодической компонентой. Как следует из опыта, это не препятствует синхронизации.

В заключение обсуждения циркадных ритмов упомянем о *хроно-терапии*. Физиология и биохимия человека существенно меняются в

течение 24-часового цикла. Более того, циркадные ритмы в ключевых биологических процессах приводят к существенной зависимости многих болезней и их симптомов от времени дня и ночи. Действие лекарств часто сильно зависит от времени их приема [Smolensky 1997]. Этот факт (весьма важный для практической медицины) довольно естественен с точки зрения нелинейной теории: как мы знаем, влияние воздействия на осциллятор существенно зависит от того, в какой фазе оно приложено.

### 3.5.2 Менструальный цикл

Менструальный цикл также можно рассматривать как не строго регулярные, т.е. зашумленные, колебания определенных гормонов. Регуляция их выделения осуществляется через системы положительной и отрицательной обратной связи. (Напомним, что существование обратной связи – необходимое свойство автоколебаний.) Период колебаний близок к 28 дням, но может значительно флуктуировать (рис. 3.42). Естественно ожидать, что периодический прием гормонов может захватить колебания; это действительно происходит при приеме гормональных таблеток (рис. 3.42). Внешняя сила подавляет диффузию фазы и делает период цикла равным в точности 28 дням.

Разумной моделью вынужденных колебаний может быть осциллятор типа накопление–сброс с изменяющимся порогом: из-за приема таблеток гормональная регуляция изменяется таким образом, что порог сначала поддерживается высоким, а затем он резко снижается и происходит сброс (это с очевидностью следует из того, что пре-

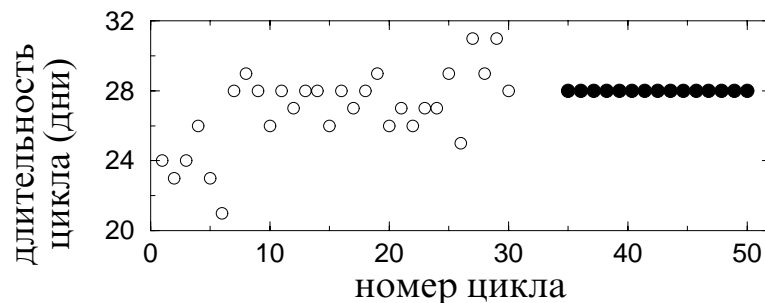


Рис. 3.42. Длительность менструального цикла обычно флуктуирует, но становится постоянной при приеме гормональных препаратов. Символы  $\circ$  и  $\bullet$  обозначают длительность цикла соответственно до начала приема препаратов и во время их действия.

кращение приема препарата немедленно приводит к менструации). Возможно, в этом случае сила не является слабой.

### 3.5.3 Захват периодических колебаний уровня инсулина периодическими инъекциями глюкозы

Основная функция гормона инсулин состоит в регуляции поглощения глюкозы мышечными и другими клетками, и тем самым в регуляции концентрации глюкозы в крови. Наиболее важным регулятором выделения инсулина поджелудочной железой служит сама глюкоза, так что инсулин и глюкоза есть два важнейших компонента системы обратной связи. У здоровых людей наблюдаются колебания выделения инсулина и концентрации глюкозы в крови с периодом примерно 2 часа (см. [Sturis *et al.* 1991, 1995] и приведенные там ссылки).

Эксперименты, проведенные Sturis *et al.* [1991], показали, что эти колебания инсулина сохраняются при постоянном внутривенном вливании глюкозы и могут быть захвачены, если глюкозу вводить колебательным образом. Если вливание глюкозы модулировать по синусоидальному закону с относительной амплитудой 33% от среднего значения, а период изменять в пределах  $\pm 20\%$  от периода, наблюдаемого при постоянном вливании глюкозы, то возникает синхрониза-

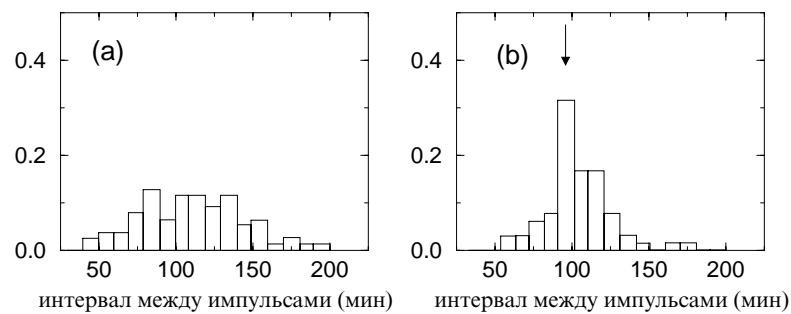


Рис. 3.43. Распределение межимпульсных интервалов (длительностей цикла) выделения инсулина при постоянном (а) и колебательном (б) вливании глюкозы. Как и ожидалось для систем с шумом, период колебаний не постоянен. Периодическая сила делает колебания регулярнее, уменьшая флуктуации длительности цикла. Это отражается в появлении пика в распределении (б). Положение пика соответствует периоду воздействия (стрелка), т.е. средний период колебаний захватывается силой. Из [Sturis *et al.* 1991].

ция порядка 1 : 1 (рис. 3.43). Введение с очень большим периодом 320 минут приводило к режиму с двумя импульсами в выделении глюкозы и инсулина на один период введения, т.е. к синхронизации порядка 2 : 1.

#### 3.5.4 Синхронизация плазмодия миксомицета *Physarum*

Плазмодий внеклеточного миксомицета *Physarum* – один из простейших организмов. В теле плазмодия различают фронтальную зону, состоящую из более или менее равномерного слоя протоплазмы, и заднюю область, состоящую из трубок-тяжей, в которых движется эндоплазма. Сила, приводящая к транспортировке, генерируется колебательной сократительной активностью тяжей (см. [Achenbach and Wohlfarth-Bottermann 1980, 1981] и приведенные там ссылки).

Поток протоплазмы ритмически меняет свою скорость и направление с периодом порядка 1–3 мин. Период и амплитуда этих колебаний зависят, в частности, от температуры окружающей среды. Колинко и др. [1985] изучали синхронизацию потока протоплазмы периодическим изменением градиента температуры. Считается, что оно вызывает изменение внутриклеточного градиента давления. Скорость течения протоплазмы измерялась с помощью доплеровского лазерного анемометра. Прежде всего определялся период автономных колебаний  $T_0$  при постоянной температуре 19 °С. Далее градиент температуры периодически изменялся с амплитудой 0.5 °С; период  $T_e$  этих колебаний изменялся ступенчато, начиная с  $T_e \approx T_0$ . В определенном диапазоне периода  $T_e$  внешней силы, период колебаний протоплазмы захватывался (рис. 3.44).

### 3.6 Явления, близкие к синхронизации

В этом разделе мы опишем некоторые явления, которые имеют отношение к синхронизации, но не могут быть классифицированы как захват автоколебаний периодической силой.

#### 3.6.1 Явления при большой внешней силе

Мы подробно, с использованием разных примеров, обсудили, как внешняя сила может захватить автоколебания. При этом, как следует из изображения области синхронизации на рис. 3.7, чем больше

расстройка между частотой силы и частотой автоколебаний, тем больше должна быть амплитуда силы. Этот рисунок может создать неправильное представление, что очень большая сила делает синхронизацию возможной даже при очень больших расстройках. Следует помнить, что в нашем описании синхронизации сила предполагалась слабой; в самом деле, мы считали, что сила действует только на фазу автоколебаний и не меняет форму предельного цикла (т.е. амплитуду). Если сила не слабая, то форма языков Арнольда будет не треугольной, и картина синхронизации становится не универсальной — она зависит от конкретных свойств автоколебаний и силы. Более того, при сильном воздействии могут наблюдаться качественно новые эффекты.

#### Хаотизация автоколебаний

Динамика вынужденных автоколебаний может стать нерегулярной, т.е. хаотической (см. краткое введение в главе 5 и раздел 7.3.4 части II, где обсуждается переход к хаосу при большой силе). Подобные режимы наблюдались в экспериментах с периодической стимуляцией

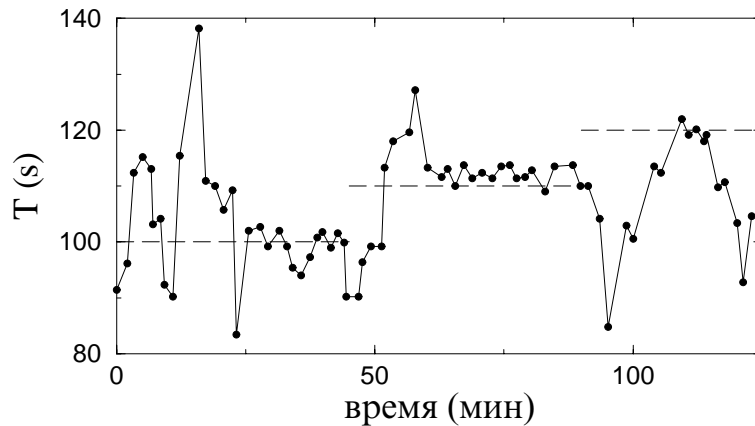


Рис. 3.44. Синхронизация колебаний потока протоплазмы плазмодия миксомицета *Physarum* гармонически изменяющимся градиентом температуры. Период колебаний протоплазмы  $T$  показан как функция времени; период  $T_e$  внешней силы изменялся ступенчато (пунктир). При  $T_e = 100$  с и  $T_e = 110$  с синхронизация устанавливается после некоторого переходного времени; в синхронном режиме  $T$  флуктуирует вокруг  $T_e$ . При дальнейшем увеличении  $T$  синхронизация разрушается и наблюдается низкочастотная модуляция  $T$ . Из [Колинько и др. 1985]. Copyright Overseas Publishers Association N.V., с разрешения Gordon and Breach Publishers.

агрегатов клеток из сердца куриного эмбриона [Guevara *et al.* 1981; Zeng *et al.* 1990]; см. рис. 3.45 и сравни его с рис. 3.21. В этих работах наблюдались также синхронные режимы, в которых два стимулирующих импульса соответствовали двум циклам. В отличие от простого режима захвата 1 : 1, здесь два импульса соответствуют двум разным фазам автоколебаний. Такое поведение (удвоение периода) типично для перехода к хаосу.

### Подавление колебаний

Иногда достаточно большая сила или даже единичный импульс могут подавить автоколебания. Это может, например, произойти, если на фазовой плоскости автоколебательной системы предельный цикл сосуществует с устойчивым состоянием равновесия.<sup>26</sup> Подавление происходит, если импульс действует в «чувствительной фазе» (рис. 3.46). Этот эффект наблюдался в экспериментах с аксонами гигантского кальмара [Guttman *et al.* 1980] и с синоатриальным узлом сердца кошки [Jalife and Antzelevitch 1979] (см. также [Winfree 1980; Гласс и Мэки 1988]).

<sup>26</sup> Такие системы называют автогенераторами с жестким возбуждением: чтобы привести их в движение, нужно приложить конечное возмущение, переводящее фазовую точку в область притяжения предельного цикла; этот механизм возбуждения называют также докритической бифуркацией Хопфа.

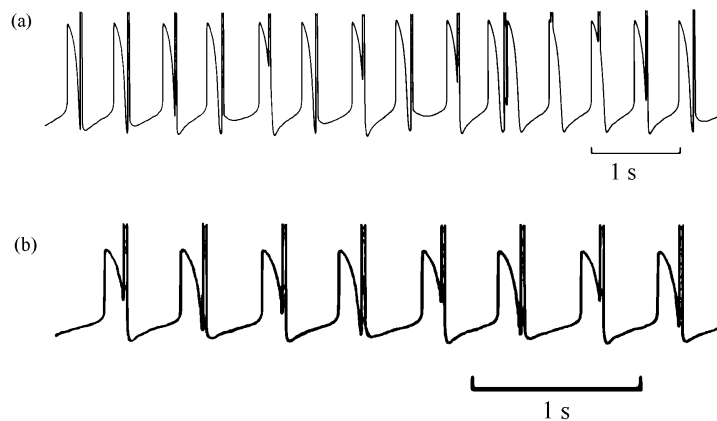


Рис. 3.45. (а) Хаотические колебания периодически возбуждаемого агрегата клеток сердца куриного эмбриона. Из [Glass and Shrier 1991], Fig. 12.5a, Copyright Springer-Verlag. (б) Синхронизация порядка 2 : 2 (удвоение периода). Из [Гласс и Мэки 1988]. Copyright ©1988 by PUP. Воспроизведено с разрешением Princeton University Press.



Ясно также, что периодическая последовательность импульсов может существенно уменьшить амплитуду колебаний, даже если состояние равновесия неустойчиво: первый импульс сдвигает точку к состоянию равновесия, а последующие не дают ей вернуться к предельному циклу. Важным практическим применением этих идей является гашение патологической активности мозга, вызывающей тремор при болезни Паркинсона (см. [Tass 1999] и приведенные там ссылки).

### 3.6.2 Воздействие на возбудимые системы

Возбудимые системы сами по себе не генерируют колебаний, поэтому их динамика не соответствует нашему пониманию синхронизации. Тем не менее, их отклик на периодическое воздействие сильно напоминает синхронизацию автоколебательных систем, и поэтому мы приводим краткое описание таких систем. Основные свойства возбудимых систем состоят в следующем.

- В ответ на воздействие, превышающее определенный порог, они генерируют импульс (иногда называемый потенциалом действия). Если воздействие меньше порогового, то отклик отсутствует или пренебрежимо мал.
- Сразу после активного периода они находятся в рефрактерной фазе, т.е. не откликаются на воздействие любой амплитуды.

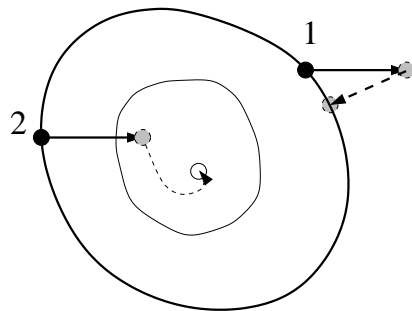


Рис. 3.46. Эффект воздействия одиночного импульса на систему, в которой сосуществуют предельный цикл и устойчивое состояние равновесия, зависит как от амплитуды, так и от фазы воздействия. Импульс, приложенный в точке 1, приводит к сдвигу фазы; импульс той же амплитуды, приложенный в точке 2, переводит фазовую точку в область притяжения устойчивого состояния равновесия (кружок) и подавляет автоколебания; граница области притяжения показана сплошной линией.

Периодическое воздействие на подобные системы приводит к различным видам колебаний, зависящим от частоты воздействия.

Возбудимость – это типичное свойство нервных и мышечных клеток, и похожие на синхронизацию явления наблюдались в экспериментах с тканями обоих типов. Matsumoto *et al.* [1987] изучали отклик аксона гигантского кальмара на последовательность импульсов. Они наблюдали различные регулярные и нерегулярные (возможно, хаотические) ритмы. В эксперименте определялись интервалы частоты воздействия, при которых отклик находился в соотношении  $n : m$  к этой частоте; эти интервалы напоминали области захвата фазы (рис. 3.47, ср. с рис. 3.19b).

Большая часть сердечных клеток не демонстрируют спонтанную активность. Они возбуждаются, или генерируют потенциал действия, под действием стимуляции, генерируемой водителем ритма (пейсмекером). Обычно, один стимул от водителя ритма вызывает один отклик (1 : 1 ритм). Однако, если возбудимость пассивных клеток уменьшается, или, если частота биений увеличивается, то этот ритм может нарушиться. В результате могут возникнуть различные сердечные аритмии [Glass and Shrier 1991; Guevara 1991; Yehia *et al.* 1999; Hall *et al.* 1999]. В частности, может случиться, что один из  $n$  стимулирующих импульсов подается в момент, когда клетки рефрактерны, и поэтому проведение этого импульса блокируется. В результате будет наблюдаться ритм  $n : (n - 1)$ . Поскольку возбудимые системы не автоколебательные, мы предлагаем говорить в этом случае не о синхронизации, а о *сложном нелинейном резонансе*.

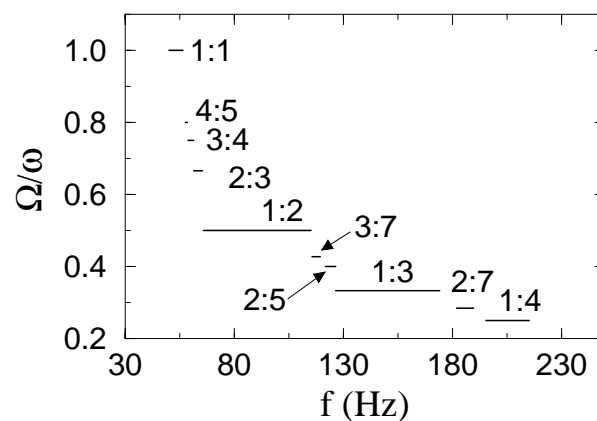


Рис. 3.47. «Чертова лестница», возникающая при воздействии на аксон гигантского кальмара. График построен с использованием данных из [Matsumoto *et al.* 1987].

### 3.6.3 Стохастический резонанс с точки зрения синхронизации

За исключением случая возбудимых систем, мы все время рассматривали влияние внешнего воздействия на системы, демонстрирующие колебания в автономном состоянии. При этом мы различали автоколебательные системы и те, в которых колебания вынужденные. В автоколебательных системах есть нейтрально устойчивая фаза, которая может быть подстроена внешним воздействием или за счет связи с другим осциллятором. В противоположность этому, при вынужденных колебаниях фаза привязана к фазе силы и не может быть легко сдвинута внешним воздействием или взаимодействием.<sup>27</sup> Соответственно, вынужденные колебания нельзя синхронизовать.

В этом разделе мы опишем класс осцилляторов, занимающий, в определенном смысле, промежуточное место между автоколебаниями и вынужденными колебаниями. Конкретнее, мы рассмотрим *колебания, возбуждаемые шумом*, т.е. обусловленные быстро флуктуирующими силами. В отличие от периодических колебаний с шумом, обсуждавшихся в разделе 3.4, здесь шум играет центральную роль: без флуктуаций колебаний нет. С другой стороны, в такой системе колебания наблюдаются без внешней периодической силы, что отличает их от возбудимых систем. В этом смысле эти системы напоминают автоколебательные, и поэтому можно ожидать возникновения явлений типа синхронизации. Как хорошо известно, многие системы с шумом демонстрируют при периодическом воздействии явление *стохастического резонанса*, наблюдавшееся во многих экспериментах (см. обзор *Gammaitoni et al. [1998]*). Мы сначала опишем общие феноменологические свойства стохастического резонанса и синхронизации, а затем обсудим физические причины этого сходства.

#### *Пороговые системы*

Начнем с модели, напоминающей осциллятор «накопление–сброс». Рассмотрим систему, в которой переменная не растет монотонно и регулярно, а испытывает случайные флуктуации (рис. 3.48а), время от времени достигая порога.<sup>28</sup> Будем отмечать каждое пересечение порога и обозначать его как событие, или импульс. Считается, что

<sup>27</sup> На языке теории динамических систем, отличие состоит в существовании у автономной автоколебательной системы нулевого ляпуновского показателя и в отсутствии нулевого показателя для вынужденных колебаний.

<sup>28</sup> Иногда такие модели называют «накопление и сброс с утечкой» [*Gammaitoni et al. 1998*].

такой моделью можно описать некоторые сенсорные нейроны, в отсутствие стимуляции генерирующие случайные импульсы.

Если порог менять периодически (рис. 3.48b), то система демонстрирует стохастический резонанс; он проявляется в типичной структуре распределения межимпульсных интервалов [Moss *et al.* 1994, 1993; Wiesenfeld and Moss 1995; Gammaitoni *et al.* 1998], см. рис. 3.48c. Действительно, система генерирует импульс с большей вероятностью, если порог максимально низкий, и поэтому интервал между импульсами скорее всего будет равен или кратен периоду силы. Из-за этого появляется корреляция между последовательностями генерируемых импульсов и внешним воздействием. В нейрофизиологической литературе эту корреляцию называют захватом фазы (см., например, [Rose *et al.* 1967; Longtin and Chialvo 1998]).

#### Бистабильные системы

Другой популярной моделью является система с двумя устойчивыми состояниями равновесия, в которой шум вызывает переходы из

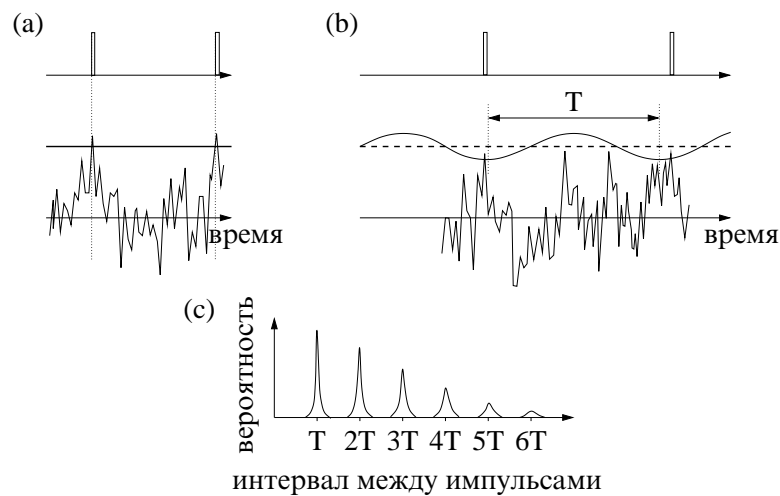


Рис. 3.48. (а) Схематическое представление пороговой шумовой системы. Она генерирует импульсы, когда шум превышает определенный порог. (б) Если порог модулируется слабым внешним сигналом, то генерация с большей вероятностью происходит при определенной фазе силы, когда порог низкий. Это приводит к характерной структуре распределения интервалов между импульсами (с). Такое распределение наблюдалось в экспериментах с периодическим воздействием на первичный слуховой нерв обезьяны *Saimiri Sciureus* [Rose *et al.* 1967] и кошки [Longtin *et al.* 1994], а также при периодическом воздействии на волосные клетки рака [Petracchi *et al.* 1995].

одного состояния в другое. Удобно представить это как движение частицы в потенциале с двумя минимумами (рис. 3.49а). Такая модель применима ко многим физическим и биологическим явлениям. Для иллюстрации мы выбрали эксперимент, проведенный Barbay *et al.* [2000] с лазером, который может излучать две моды с разной поляризацией, что соответствует двум устойчивым состояниям. Из-за шума генерация лазера нерегулярно переключается между излучением этих мод; для простоты изложения мы по-прежнему будем говорить о частице в бистабильном потенциале. Этот потенциал, реконструированный по данным эксперимента, показан на рис. 3.49б.

Частота перескоков частицы между потенциальными ямами зависит от интенсивности шума. При малом шуме перескоки редки; с увеличением его интенсивности частота растет. Наконец, если шум очень большой, то частица не «чувствует» минимумы потенциала и движется взад-вперед совершенно случайно. Слабая внешняя сила меняет потенциал,<sup>29</sup> делая одно состояние более устойчивым, чем другое (рис. 3.49а). Перескоки между ямами более вероятны в те моменты, когда барьер низкий; в результате при определенной интенсивности шума индуцированные шумом перескоки оказываются

<sup>29</sup> Слабость силы означает, что она не может вызвать перескок в отсутствие шума.

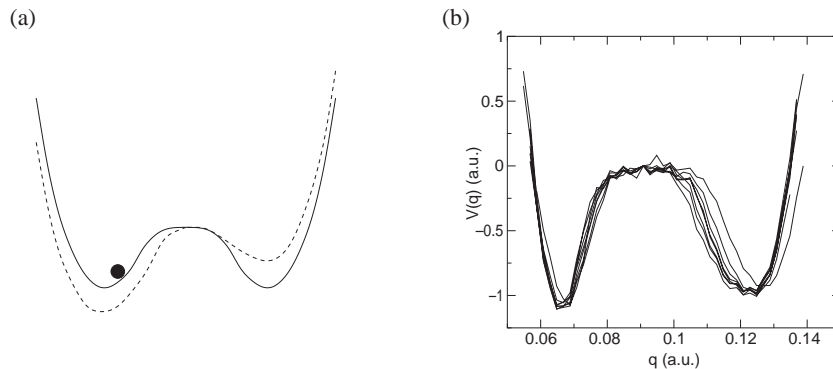


Рис. 3.49. (а) Движение частицы в потенциале с двумя ямами. Шум приводит к нерегулярным переходам между двумя устойчивыми состояниями. Слабая периодическая сила изменяет потенциал так, что высота барьера периодически меняется (одно мгновенное состояние показано штриховой линией). (б) Эффективный бистабильный потенциал  $V(q)$ , полученный по данным эксперимента с лазером (координата и высота потенциала даны в произвольных единицах). Рисунок (б) из Barbay *et al.*, *Physical Review E*, Vol. 61, 2000, pp. 157–166. Copyright 2000 by the American Physical Society.

в примерном синхронизме с силой (рис. 3.50).<sup>30</sup> Это проявление *стохастического резонанса* наблюдалось во многих экспериментах (см., например, [Gammaitoni *et al.* 1998]). В определенном смысле стохастический резонанс можно интерпретировать как синхронизацию индуцированных шумом колебаний [Simon and Libchaber 1992; Shulgin *et al.* 1995]. Недавно для характеристики этого явления стало также использоваться понятие фазы [Neiman *et al.* 1998, 1999c]; в этом контексте один скачок частицы отвечает увеличению фазы на  $\pi$ .

Схожесть свойств синхронизации таких разных систем как автоколебательная и стохастическая бистабильная система можно объяснить следующим образом. Мы подробно обсуждали, что возмож-

<sup>30</sup> Отметим сходство в динамике бистабильной и пороговой системы с внешней периодической силой: в обоих случаях сила модулирует барьер и способствует переходам при определенной фазе силы.

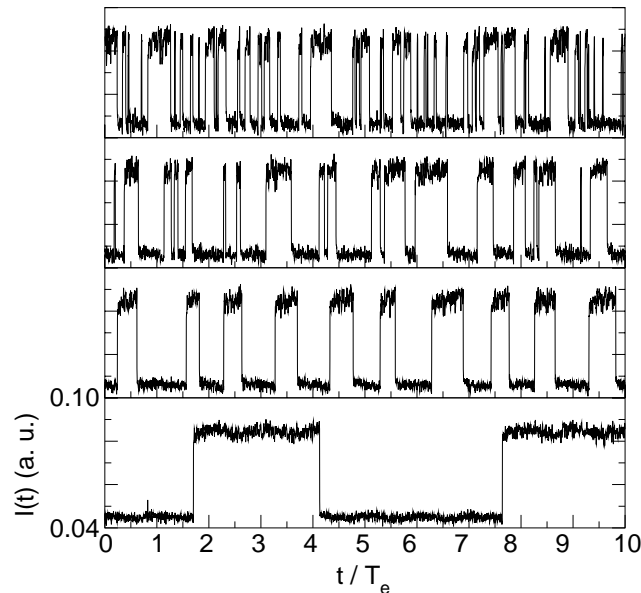


Рис. 3.50. Результаты экспериментов Barbay *et al.* [2000]. Временная зависимость поляризации излучения лазера в присутствии периодической внешней силы с периодом  $T_e$ . Различные кривые отвечают различным интенсивностям шума (она возрастает снизу вверх). При слабом и сильном шуме синхронизации нет, а при среднем шуме (вторая кривая снизу) перескоки практически идеально синхронизованы с внешней силой (читатель может легко идентифицировать силу по маркерам на оси времени). Из Barbay *et al.*, *Physical Review E*, Vol. 61, 2000, pp. 157–166. Copyright 2000 by the American Physical Society.

ность синхронизации автоколебаний основана на том, что их фаза свободна (и поэтому может быть легко сдвинута), в то время как у систем с периодической силой фаза фиксирована (см. рис. 2.9 и раздел 2.3.2). Это следует из того, что для автономных автоколебательных систем все моменты времени эквивалентны, а для вынужденных колебаний – нет, поскольку сила зависит от времени. Последнее верно и для бистабильных систем с шумом: положение частицы (и, следовательно, фаза) определяется флуктуирующей силой.

Ключевой момент, позволяющий описать стохастический резонанс как синхронизацию, заключается в наличии двух временных масштабов. Один (микроскопический) масштаб связан с временем корреляции шума; он мал. Другой (макроскопический) масштаб – это характерное время между макроскопическими событиями (импульсами в пороговой системе, скачками в бистабильной); он много больше времени корреляции шума. Нас интересуют скачки (импульсы) и интервалы времени между ними. Различие двух временных масштабов позволяет сказать, что макроскопические события могут произойти в любой момент времени. Например, между двумя пересечениями порога на рис. 3.48а процесс может много раз почти подходить к порогу, не достигая его. Немного изменив порог в какой-то момент времени, мы можем вызвать импульс. Это означает, что фаза макроскопического события может быть сдвинута слабым воздействием, а это как раз и есть свойство, обеспечивающее синхронизацию.

#### 3.6.4 Захват нескольких осцилляторов общей силой

В этом разделе мы опишем довольно простое следствие синхронизации внешней силой: появление когерентных колебаний в ансамбле осцилляторов, на которые действует общая сила; при этом часто говорят об осцилляторах, находящихся в общем поле.

##### *Когерентное сложение колебаний. Пример: захват решетки лазеров внешним полем*

Представим, что есть несколько схожих автогенераторов, на которые действует общая внешняя сила (рис. 3.51). Пусть осцилляторы различны, но имеют близкие частоты. Тогда периодическая внешняя сила может синхронизовать все или почти все из них. В результате осцилляторы будут колебаться когерентно, с одной и той же частотой (но, возможно, с разным сдвигом фазы).

Этот простой факт позволяет использовать синхронизацию для получения когерентного сложения сигналов от разных генераторов.

Например, таким способом можно получать лазерное излучение большой интенсивности. Современная технология позволяет изготовить решетку полупроводниковых лазеров на одном кристалле; такие лазеры дешевы, но их мощность невелика. Простое сложение их световых пучков не позволяет увеличить мощность. Действительно, даже если лазеры полностью идентичны и излучают на одной и той же частоте, то их поля имеют разные фазы.<sup>31</sup> Тогда в некоторый момент времени поля будут иметь разный знак и частично компенсировать друг друга. Разница частот еще более препятствует тому, чтобы при сложении колебаний получился большой выходной сигнал.<sup>32</sup> Поэтому, чтобы получить выходной сигнал большой интенсивности, поля должны иметь не только одну и ту же частоту, но и близкие фазы, т.е. лазеры должны быть синхронизованы. Этого можно достичь, если использовать один лазер для синхронизации остальных. Такой механизм, известный в оптике как *захват внешним полем*, довольно эффективен (см. детали в [Buczek *et al.* 1973; Kurokawa 1973]). В экспериментах [Goldberg *et al.* 1985] с использованием внешнего поля мощностью менее 3 мВт удалось достичь генерации мощностью 105 мВт в решетке из десяти лазерных диодов (рис. 3.52).

Этот механизм когерентного сложения колебаний можно рассматривать как метод обнаружения слабого сигнала. Действительно, решетка лазеров может рассматриваться как «усилитель», выдаю-

<sup>31</sup> Напомним, что фаза автоколебаний может быть любой; она зависит от того, как автогенератор «включался», т.е. от начальных условий. Поэтому автогенераторы в ансамбле будут иметь в общем случае разные фазы.

<sup>32</sup> При некогерентном сложении колебаний результат пропорционален корню из числа осцилляторов, а при когерентном – числу осцилляторов.

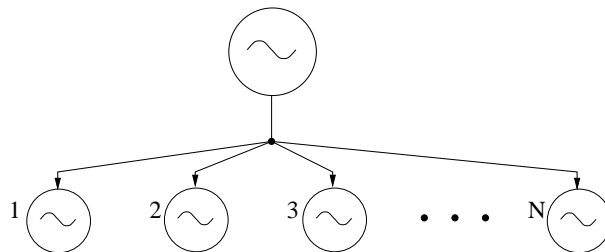


Рис. 3.51. Ансамбль схожих осцилляторов под действием общей внешней силы.



щий мощный выходной сигнал, если на вход подан слабый сигнал. Конечно, этот усилитель работает только в узком диапазоне частот (расстройка основного числа элементов ансамбля должна быть малой).

Не исключено, что похожий принцип реализуется в живых организмах для повышения чувствительности органов чувств. Последние обычно состоят из множества нейронов, генерирующих импульсы с разными частотами. При появлении внешнего сигнала группы нейронов с частотами, близкими к частоте стимуляции, будут захвачены, и сигнал, поступающий от них в мозг, будет большим. Другие группы нейронов реагируют на другие частоты, что делает возможным детектирование слабых сигналов.

#### Пример: циркадные колебания в клетках

Внешнее воздействие на ансамбль неидентичных и невзаимодействующих осцилляторов приводит к появлению макроскопических колебаний. Ясно, что, если сила прекращает действовать, то эти колебания затухают, поскольку каждый осциллятор теперь колеблется со своей частотой – спустя некоторое время их фазы расходятся и колебания компенсируют друг друга. Рассмотрим эксперимент, описанный в [Whitmore *et al.* 2000]. Он подтверждает тот факт, что циркадная система позвоночных представляет собой децентрализо-

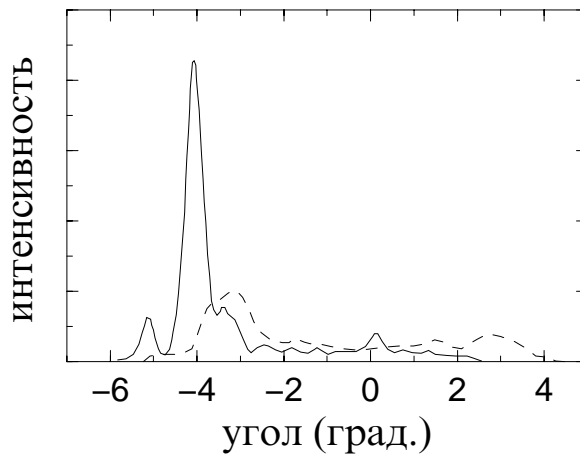


Рис. 3.52. Захват решетки лазеров внешним полем. Сложение полей излучения независимых лазеров дает световое поле малой интенсивности (штриховая линия). Если на решетку подавать пучок с задающего лазера, то на выходе в результате синхронизации отдельных лазеров получается мощный сигнал (сплошная линия). Из [Goldberg *et al.* 1985].

ванный набор периферийных часов, и эти периферийные осцилляторы непосредственно восприимчивы к свету. Наблюдаемой в эксперименте величиной являлась сумма колебаний отдельных клеток.

Whitmore *et al.* [2000] исследовали экспрессию гена *Clock* в периферийных органах (сердце и почки) рыбы-зебры. Две группы органов поддерживались в культуре, одна при постоянной освещенности, а другая в условиях смены дня и ночи. В обеих группах экспрессия гена *Clock* продолжала осциллировать как *in vivo*. В органах, освещавшихся в соответствии с суточным циклом, амплитуда и устойчивость колебаний *Clock* были больше, чем в группе, находившейся в темноте. Смена цикла на противоположный (т.е. сдвиг фазы силы на  $\pi$ ) приводил к захвату с новой фазой.

Циркадные колебания наблюдались также в иммортализованных клеточных линиях. Линия одной эмбрионной клетки рыбы-зебры демонстрировала постоянный уровень экспрессии *Clock* в темноте. Однако, когда эти клетки подвергались переменному освещению с суточной периодичностью, то колебания уровня *Clock* были видны уже в первый день; форма колебаний была такова, что пик был относительно широкий и низкий (т.е. максимум имел разброс несколько часов). На второй день цикла пик экспрессии сосредотачивался в определенной фазе силы, и амплитуда колебаний была больше. Когда эти клетки снова помещались в темноту, колебания продолжались два цикла, но с уменьшением амплитуды и расширением пика. На третий день колебания не были видны. Продолжение колебаний в темноте после действия дневного цикла служит подтверждением гипотезы о том, что клетки содержат часы, которые захватываются суточным циклом освещенности.

Whitmore *et al.* [2000] пришли к выводу, что отсутствие периодической экспрессии в темноте указывает на то, что либо цикл день – ночь синхронизует имеющие случайные фазы колебания в отдельных клетках, либо инициирует циркадные колебания, которых не было раньше. Для разрешения этой дилеммы следует провести визуализацию экспрессии в отдельных клетках с помощью флюорисцентного гена-репортера.

**Пример: синхронизация митотического цикла при острой лейкемии**

Любопытный механизм синхронизации был реализован Lampkin *et al.* [1969] при лечении пятилетнего мальчика, страдавшего острой лимфобластозной лейкемией. Идея состоит в том, что большинство химиотерапевтических средств, эффективных при этом заболевании,

действуют в основном в одной из фаз митотического цикла. Следовательно, терапия может быть более эффективна, если лейкозные клетки синхронизованы в чувствительной фазе, чтобы сделать их более восприимчивыми к лекарству, действие которого зависит от фазы митотического цикла.

Обычно делящиеся лейкозные клетки с равной вероятностью находятся в разных фазах митоза. Синхронизация достигалась введением специального лекарства (арабинозид цитозина), которое замедляет или останавливает синтез ДНК. Клетки, вступающие в фазу синтеза ДНК, подвергаются влиянию этого лекарства и задерживаются в этой стадии митоза. Таким образом, все больше клеток накапливается в S-фазе митотического цикла. После прекращения действия лекарства, синтез ДНК возобновлялся одновременно во всех этих клетках и, следовательно, они были синхронизованы. Затем вводилось другое лекарство (винкрестин).

Такая двухшаговая терапия повторялась три раза с недельным интервалом, и после этого пациент достиг полной ремиссии; во время написания статьи [Lampkin *et al.* 1969] он подвергался поддерживающей терапии и по-прежнему находился в состоянии полной ремиссии.

Недавние исследования показали, что этот механизм синхронизации играет важную роль при митозе (делении ядра). Этот процесс можно уподобить симфоническому оркестру, в котором много инструментов, играя индивидуально, подчиняются дирижерской палочке. Эти «дирижеры», называемые «checkpoints», регулируют продвижение клетки по митотическому циклу, предотвращая ошибки в разделении хромосом, которые могут привести к таким заболеваниям, как синдром Дауна и рак [Cortez and Elledge 2000; Scolnick and Halazonetis 2000].

## Глава 4

# Синхронизация двух и многих осцилляторов

В главе 3 мы в деталях изучили синхронизацию осциллятора внешней силой. Здесь мы распространяем эти идеи на более сложные случаи, когда взаимодействуют два или несколько осцилляторов.

Мы начнем с рассмотрения двух взаимно связанных автоколебательных систем. Этот случай включает классические эксперименты Гюйгенса, Рэлея и Эплтона, а также множество других экспериментов и явлений природы. Мы опишем эффекты захвата фаз и частот в таких системах, в том числе в присутствии шумов. Далее мы проиллюстрируем некоторые особенности в синхронизации релаксационных осцилляторов и кратко обсудим случай взаимодействия нескольких осцилляторов. Здесь мы также обсудим свойства синхронизации систем специального класса, а именно ротаторов.

Эта глава также включает обсуждение синхронизации в больших пространственно упорядоченных ансамблях автоколебательных систем (в цепочках и в решетках), а также в непрерывных колебательных средах. Интересным эффектом в таких системах является формирование синхронных кластеров.

Глава продолжается описанием и качественным объяснением самосинхронизации в больших популяциях осцилляторов, связанных каждый с каждым (такая связь называется также глобальной). Один пример такого явления – синхронизация вспышек света, генерируемых популяцией светлячков, – был рассмотрен в главе 1; дальнейшие будут приведены в этой главе. Мы завершаем главу описанием

различных экспериментов.

## 4.1 Взаимная синхронизация автоколебательных систем

В этом разделе мы обсуждаем синхронизацию взаимно связанных осцилляторов. Этот эффект очень близок к случаю синхронизации внешней силой, детально рассмотренному в главе 3. Тем не менее, есть некоторые особенности, которые мы и опишем далее. Мы также кратко обсудим случай взаимодействия нескольких осцилляторов.

### 4.1.1 Два взаимодействующих осциллятора

Синхронизация была изначально открыта в системе двух связанных осцилляторов. Мы уже описали в главе 1 наблюдения взаимодействующих маятниковых часов Христианом Гюйгенсом и органных труб лордом Рэлеем. В этом разделе мы объясняем как эти, так и другие эксперименты, используя идеи и понятия, введенные в предыдущих главах. Первым делом мы обсудим подстройку частот.

#### *Захват частот*

В общем случае взаимодействие двух систем несимметрично: либо один осциллятор мощнее другого, либо они влияют друг на друга в разной степени, либо и то, и другое. Если воздействие в одном направлении существенно сильнее, чем в другом, то мы вновь имеем дело с частным случаем синхронизации внешней силой. Мы знаем, что в этом случае частота системы подтягивается к частоте воздействия. Основная особенность взаимного воздействия – это то, что меняются частоты обоих осцилляторов. Обозначим частоты автономных систем (часто называемые парциальными) как  $\omega_1$  и  $\omega_2$ , и пусть  $\omega_1 < \omega_2$ ; наблюдаемые частоты взаимодействующих осцилляторов мы обозначим как  $\Omega_{1,2}$ . Тогда, если связь достаточно сильна, то захват частот возникает в результате их взаимной подстройки, так что  $\Omega_1 = \Omega_2 = \Omega$ , где обычно  $\omega_1 < \Omega < \omega_2$ , см. рис. 4.1.<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Два осциллятора могут быть связаны довольно сложным образом. Так, например, два электронных генератора могут быть связаны через резистор и дополнительно взаимодействовать за счет перекрытия магнитных полей катушек индуктивности. Следовательно, в общем случае связь характеризуется несколькими параметрами. При такой сложной связи частоты в синхронном режиме могут находиться и вне интервала  $[\omega_1, \omega_2]$ .

## Захват фаз

Захват частот предполагает также и существование определенного соотношения между фазами. Это соотношение зависит не только от расстройки частот и силы связи, но также и от способа взаимодействия. Во введении мы упомянули эксперименты с маятниковыми часами, проведенные И. И. Блехманом [1981] с сотрудниками; они наблюдали как синхронизацию часов в противофазе (разность фаз близка к  $\pi$ ), так и синхронизацию в фазе (разность фаз близка к

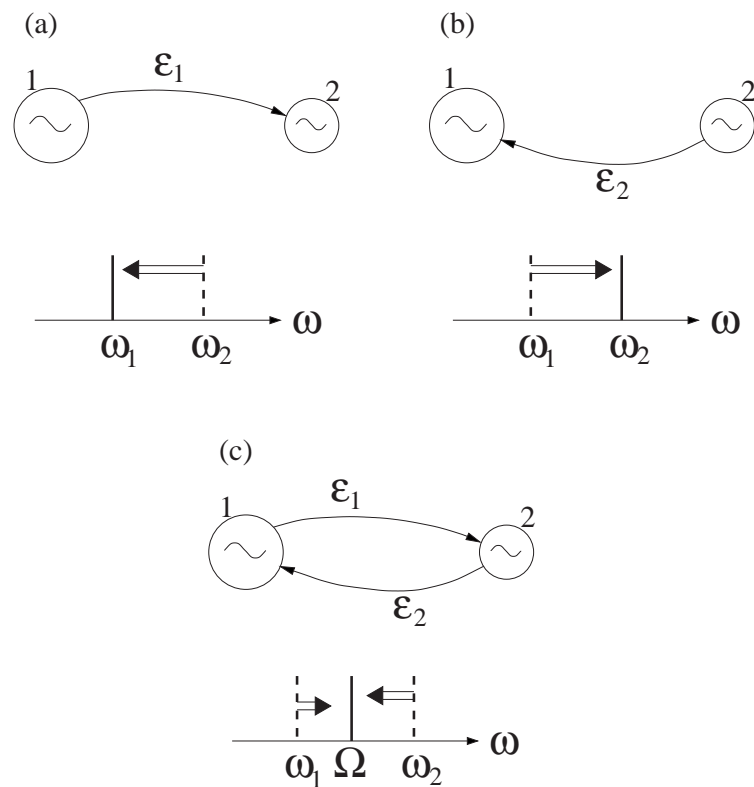


Рис. 4.1. Подстройка частот двух взаимодействующих осцилляторов ( $\omega_1$  и  $\omega_2$  – это автономные частоты). Если связь действует только в одном направлении (а и б), то частота системы под воздействием (вертикальная пунктирная линия) подтягивается к частоте воздействующего осциллятора. Это эквивалентно захвату внешней силой. Если взаимодействие двустороннее ( $\epsilon_{1,2} \neq 0$ ), то меняются частоты обеих систем (с); общая частота  $\Omega$  синхронных колебаний обычно лежит между  $\omega_1$  и  $\omega_2$ . Частотная диаграмма может рассматриваться как схематическое изображение спектра мощности колебаний.

нулю).<sup>2</sup> Напомним читателю, что первооткрыватель синхронизации Христиаан Гюйгенс наблюдал синхронизацию в противофазе.

Рассмотрим два почти идентичных симметрично связанных осциллятора. Если взаимодействие слабое, то, в полной аналогии со случаем внешней силы, мы можем предположить, что оно влияет лишь на фазы, сдвигая точки вдоль предельных циклов, но не на амплитуды. Взаимодействие зависит некоторым образом от двух фаз, и два простейших случая – это когда связь либо сближает фазы (рис. 4.2a), либо расталкивает их (рис. 4.2b). Ясно, что взаимодействие, притягивающее фазы, приводит к синхронизации в фазе, а отталкивающее – к синхронизации в противофазе. Используя те же самые аргументы, что и для случая осциллятора с внешней силой (см. раздел 3.1), приходим к выводу, что расстройка делает разность фаз не в точности нулем (не в точности  $\pi$ ).

<sup>2</sup> Двое почти одинаковых часов синхронизируются в противофазе, если собственная частота вибраций балки не сильно отличается от частот часов; в противоположном случае возможны оба режима (см. [Блехман 1971, 1981; Ланда 1980], где эта проблема исследуется аналитически).

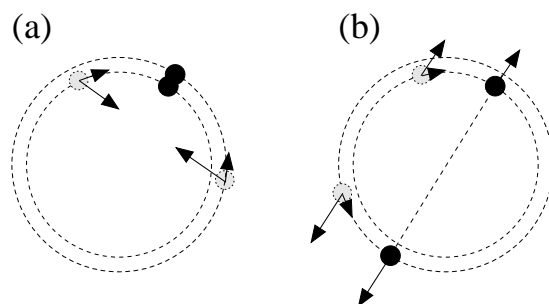


Рис. 4.2. Два взаимно связанных осциллятора с притягивающим (a) и отталкивающим (b) фазы взаимодействием. Схема показывает фазы двух систем с равными собственными частотами; они изображены в системе координат, вращающейся с частотой  $\omega = \omega_{1,2}$ . Притяжение (отталкивание) фаз, показанное стрелками, приводит к синхронизации в фазе (противофазе). Компоненты сил, стремящиеся сдвинуть точки вдоль предельного цикла, также показаны стрелками. В случае ненулевой расстройки (т.е. неидентичных осцилляторов), разность фаз в синхронном состоянии не в точности ноль (или не в точности  $\pi$ ); возникает дополнительный фазовый сдвиг, так что в результате взаимодействие компенсирует разбегание фаз из-за разности частот (ср. с рис. 3.4).

### Синхронизация высшего порядка

В общем случае, когда частоты несвязанных систем подчиняются соотношению  $n\omega_1 \approx m\omega_2$ , при достаточно сильной связи возникает синхронизация порядка  $n : m$ . Частоты взаимодействующих систем становятся захваченными,  $n\Omega_1 = m\Omega_2$ ; устанавливается также соотношение между фазами. Условие захвата фаз может быть сформулировано в виде

$$|n\phi_1 - m\phi_2| < \text{constant}, \quad (4.1)$$

(ср. с уравнением (3.3) для случая осциллятора под действием внешней силы). Фазовый сдвиг между осцилляторами зависит от начальной расстройки между взаимодействующими системами, а также от вида и параметров связи.

#### 4.1.2 Пример: синхронизация триодных генераторов

Е. В. Эплтон [Appleton 1922] систематически исследовал свойства синхронизации триодных генераторов в специально спланированном

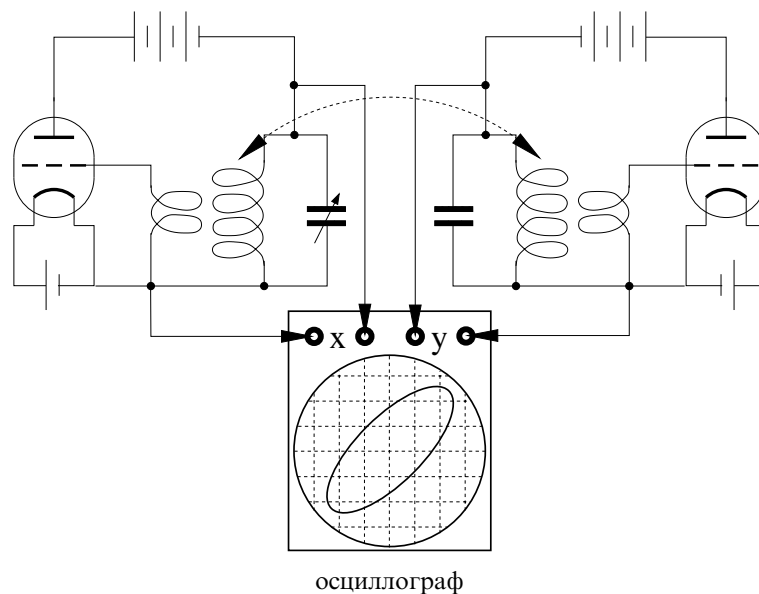


Рис. 4.3. Схема эксперимента Е. В. Эплтона с генераторами на лампе-триоде [Appleton 1922]. Пунктирная дуга показывает, что катушки были размещены таким образом, что их магнитные поля перекрывались; это обеспечивало связь между генераторами.



эксперименте. Он изучал как синхронизацию внешней силой, так и взаимную синхронизацию двух связанных неидентичных систем. Схема установки последнего эксперимента показана на рис. 4.3. Каждый генератор состоит из усилителя (вакуумной лампы–триода), колебательного  $LC$ -контура и цепи обратной связи, реализованной с помощью второй индуктивности. Эта катушка соединяет выход и вход усилителя, подавая сигнал, пропорциональный колебаниям в  $LC$ -контуре сетки лампы.

Есть несколько возможностей связать два триодных генератора. Например, их можно связать через сопротивление. В своих экспериментах Эпплтон разместил катушки индуктивности вблизи друг от друга, так что их магнитные поля перекрывались, и, следовательно, токи в  $LC$ -контурх воздействовали друг на друга.

Эксперимент проводился с осцилляторами с низкой частотой  $\approx 400$  Гц. Частоту одной из систем можно было изменять, подстраивая конденсатор. Влияние расстройки отслеживалось двумя способами. Во-первых, на осциллографе наблюдались фигуры Лиссажу, что свидетельствовало о равенстве наблюдаемых частот в определенном диапазоне расстроек. Фазовый сдвиг между синхронными генераторами также оценивался по фигурам Лиссажу. Во-вторых, измерялась частота биений. Это делалось достаточно простым способом: биения были столь медленны, что Эпплтон мог сосчитать их на слух.

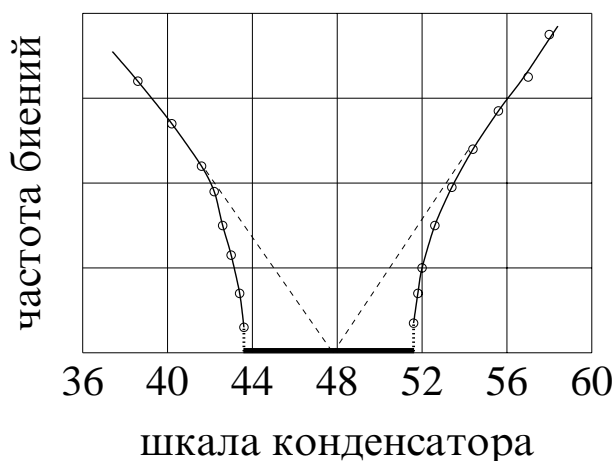


Рис. 4.4. Результаты эксперимента со связанными триодными генераторами. Если бы не эффект синхронизации, то частота биений изменялась бы, как показано пунктирной линией. Сплошные линии проведены через экспериментально полученные значения. Область синхронизации показана горизонтальным отрезком жирной линии. Из [Appleton 1922].

Частота биений  $|\Omega_1 - \Omega_2|$  показана на рис. 4.4 как функция показаний регулятора настройки конденсатора (в произвольных единицах), т.е. как функция расстройки.

Отметим, что разность фаз в области синхронизации изменялась от 0 до  $\pi$ , принимая значение  $\pi/2$  при расстройке, близкой к нулю. Возможное объяснение этому состоит в том, что генераторы в экспериментах Эплтона были не только расстроены по частоте, но также имели и различные амплитуды, так что один генератор доминировал. Поэтому свойства синхронизации в данной системе очень близки к случаю синхронизации внешней силой.

#### 4.1.3 Пример: частота дыхания и частота взмаха крыльев свободно летящих уток

Взаимосвязь между сердечным ритмом, частотой дыхания и частотой взмаха крыльев свободно летящих морских уток (*barnacle geese*, *Branta leucopsis*) изучалась в работе [Butler and Woakes 1980]. Две утки были успешно приручены и натренированы лететь за грузовиком, в котором находился хозяин. Каждой утке был имплантирован двухканальный радиопередатчик, так что частоты сердцебиения и дыхания могли регистрироваться до, во время и после достаточно долгих полетов. Измеряемые поток воздуха в трахее и электрокардиограмма транслировались на приемное устройство. Полет также фиксировался на видеопленку; по этой съемке определялась частота взмахов крыльями.

Экспериментаторы не обнаружили взаимосвязи между какой-либо из измеряемых частот и скоростью полета птиц, а также между сердцебиением и дыханием. В то же время, частота взмаха крыльев и частота дыхания находились в соотношении 3 : 1; наблюдалась также тесная взаимосвязь между фазами двух колебаний. Распределение частоты дыхания, показанное на рис. 4.5, указывает на наличие захвата частот порядка 1 : 3 и, возможно, 1 : 2.

В течение большинства дыхательных циклов наблюдалось три взмаха крыльев за цикл, причем крылья всегда были полностью подняты в момент перехода от выдоха к вдоху. Взмах крыльев координировался с фиксированной фазой дыхательного цикла. В среднем, крылья были полностью подняты при  $\approx 6$ , 40.5 и 74% от длительности дыхательного цикла (рис. 4.6). Фазовые соотношения присутствовали в течение достаточно длительных полетов и поддерживались даже при (медленном) изменении частот процессов. Это соответствовало результатам других исследований, где захват

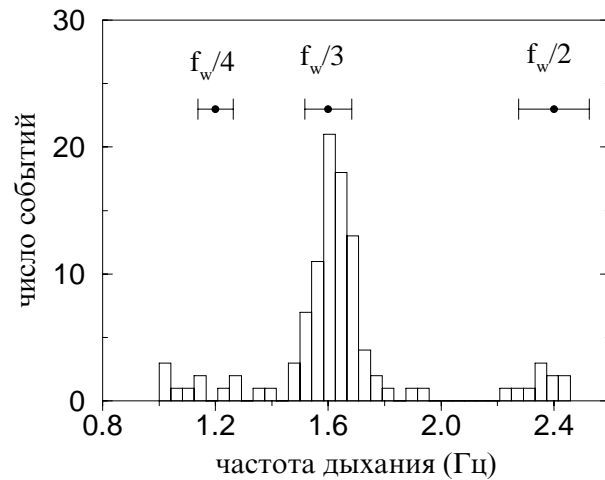


Рис. 4.5. Гистограмма частоты дыхания морской утки во время полета. Каждое измерение – это частота, усредненная по шести циклам. В верхней части графика показаны средние значения  $\pm$  стандартное отклонение частоты взмахов крыльев  $f_w$ , поделенные на целые числа, соответствующие порядку захвата частоты. Из [Butler and Woakes 1980] с разрешения Company of Biologists Ltd.

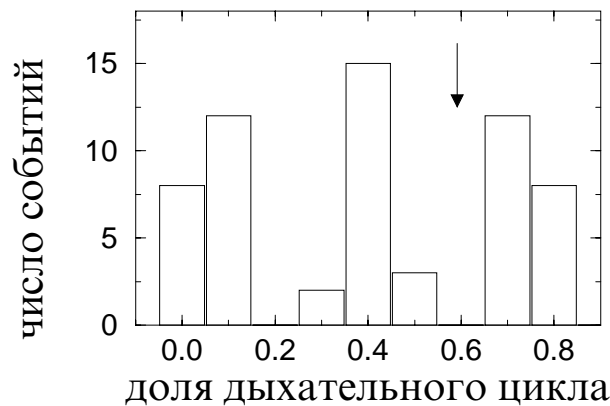


Рис. 4.6. Гистограмма фаз дыхательного цикла утки во время полета, соответствующих моменту, когда крылья были полностью подняты. Показаны двадцать дыхательных циклов, каждый из которых занимал два кинокадра. Каждый интервал гистограммы соответствовал, таким образом, одному кадру. Нулевой кадр соответствует моменту, когда клюв открывался; стрелки отмечают фазу, когда он закрывался. Из [Butler and Woakes 1980] с разрешения Company of Biologists Ltd.

порядка 1 : 1 и даже столь высокого порядка как 1 : 5 наблюдался у других видов птиц (см. ссылки в [Butler and Woakes 1980]). Было также найдено, что крылья полностью подняты в начале вдоха, и что начало выдоха совпадало с началом опускания крыльев. Вопрос, дают ли такие фазовые соотношения какое-либо механическое преимущество для процесса вентиляции легких, остается открытым.

Отметим, что рис. 4.6 может рассматриваться как стробоскопическое изображение: фаза дыхания наблюдается здесь при фиксированном значении фазы движения крыльев (когда крылья полностью подняты). *Фазовый стробоскоп* – это очень эффективный метод для выявления взаимосвязи между фазами по измеренным данным; мы будем широко использовать его в главе 6.

#### 4.1.4 Пример: переход между состояниями с синфазными и противофазными движениями

Следующим примером мы хотим проиллюстрировать вышеупомянутые свойства взаимной синхронизации: для одних и тех же систем разность фаз в синхронном состоянии может принимать различные значения, в зависимости от того, как именно введена связь.

Первоначально описываемый эффект наблюдался Дж. А. С. Келсо; позже он был изучен Хакеном, Келсо и соавторами (см. детали и ссылки в [Haken *et al.* 1985; Haken 1988]). В их экспериментах испытуемому давалось задание выполнять колебательные противофазные движения указательными пальцами, постепенно увеличивая частоту. Оказалось, что при более высоких частотах это движение становится неустойчивым и наблюдается быстрый переход к синфазному режиму,<sup>3</sup> см. рис. 4.7 и 4.8.

Объяснение этого явления основывается на гипотезе, утверждающей, что ритмическое движение пальцев управляется активностью соответствующего пейсмекера в центральной нервной системе, называемого центральным генератором ритма (ЦГР). Соответственно, синхронное колебательное движение двух пальцев может быть рассмотрено как следствие взаимной синхронизации двух ЦГР. Естественно предположить, что эти генераторы взаимодействуют. Очень важен тот факт, что это взаимодействие использует *запаздывающие во времени связи*. Действительно, известно, что мозг получает информацию о положении и скорости членов; эта информация по-

<sup>3</sup> Движение считается синфазным, когда обе сгибающие (разгибающие) мышцы сокращаются одновременно.

ставляется специальными сенсорами – проприоцепторами, расположенными в мышцах и сухожилиях. Проприоцептивная информация используется соответствующими разделами мозга и поступает туда с некоторой задержкой. Естественно предположить, что такой сигнал от каждой кисти влияет как на «свой», так и на «чужой» генератор. Предположим также, что такая связь приводит к синхронизации, например, в противофазе. При низких частотах задержка в цепи связи много меньше периода колебаний, и, следовательно, ей можно пренебречь. С другой стороны, запаздывание эквивалентно сдвигу фазы проприоцептивного сигнала. Если запаздывание становится сравнимым с половиной периода, то оно соответствует фазовому сдвигу на  $\pi$ . Такой сдвиг может быть причиной наблюдаемого в экспериментах перехода.

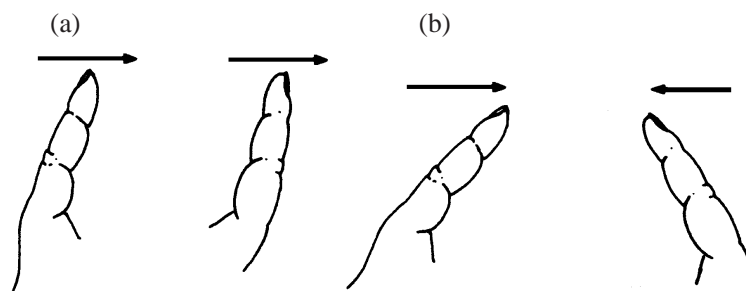


Рис. 4.7. С возрастанием скорости противофазное движение указательных пальцев (a) внезапно сменяется синфазным (b). Из [Haken 1988], Fig. 11.1, Copyright Springer-Verlag.

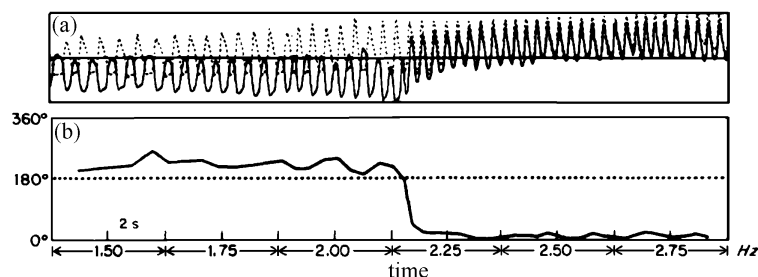


Рис. 4.8. (a) Временная зависимость смещения указательных пальцев левой (сплошная линия) и правой (пунктир) рук. Испытуемый начинает с противофазного режима и увеличивает частоту колебательных движений, следуя инструкциям экспериментатора. (b) Разность фаз двух колебаний. Из [Haken 1988], Fig. 11.2, Copyright Springer-Verlag.

#### 4.1.5 Заключительные замечания и связанные с синхронизацией эффекты

Мы показали с помощью простых аргументов и проиллюстрировали описанием нескольких экспериментов, что эффекты захвата фаз и частот двух взаимодействующих осцилляторов весьма сходны со случаем осциллятора под внешним воздействием. Соответственно, синхронизация двух систем может быть охарактеризована тем же образом, с помощью графиков разности наблюдаемых частот – расстройка и семействами областей синхронизации (языков Арнольда). Возникновение синхронизации опять является переходом от квазипериодического движения с двумя несоизмеримыми частотами к движению с единой частотой. Временная зависимость разности фаз вблизи границы области синхронизации такая же, как и в случае осциллятора под воздействием периодической внешней силы: интервалы почти постоянной разности фаз перемежаются с относительно быстрыми проскоками фазы (см. рис. 3.8).

Есть также и некоторые различия между двумя случаями. Во-первых, для двух взаимодействующих систем частота синхронного движения непостоянна внутри языка Арнольда (выполняется только соотношение  $n\Omega_1 = m\Omega_2$ ). Действительно, два осциллятора взаимно подстраивают свои частоты, пока не достигнут «компромисса»; результирующая частота зависит от начальной расстройки. Во-вторых, фазовый сдвиг в захваченном режиме зависит от вида связи между системами; в частности, можно с определенностью различать син- и противофазные режимы.

#### *Гашение колебаний*

Взаимная синхронизация – это не единственный эффект взаимодействия. Если связь достаточно велика, то она может привести к **гашению колебаний** (quenching). (Этот эффект также называют «вымиранием» колебаний.) Пример гашения – давнее наблюдение лорда Рэлея, который обнаружил, что органые трубы взаимно подавляют свои вибрации – был приведен во введении. Причиной такого подавления является то, что взаимодействие может вносить в объединенную систему дополнительную диссипацию. Представим себе, что два электронных генератора, типа использовавшихся Эплтоном, связаны через сопротивление. Дополнительные потери энергии за счет тока через сопротивление могут не компенсироваться поступлением энергии из источника, и в результате колебания вымирают.

### Многомодовые системы

До этого момента мы обсуждали только автоколебательные системы, генерирующие колебания с одной основной частотой; образом таких колебаний является точка, двигающаяся по предельному циклу. В общем случае автоколебательная система может генерировать два (или несколько) процессов, называемых *модами* и имеющих (в общем случае) несоизмеримые частоты. Многомодовая генерация может встречаться в случае, если динамика осциллятора описывается более, чем двумя переменными, т.е. эволюция системы представляется движением точки в  $M$ -мерном фазовом пространстве, где  $M \geq 3$ . Так, например, ламповый генератор на триоде, типа исследованного Эплтоном и Ван-дер-Полем, но с дополнительным колебательным контуром – это четырехмерная система, и для некоторых значений параметров она может генерировать две моды.

Может оказаться (при определенных начальных условиях), что, вследствие конкуренции, выживает только одна мода, но могут сосуществовать и обе. В последнем случае можно рассматривать синхронизацию мод, хотя систему и нельзя разделить на два независимых автогенератора. Путем изменения параметров системы можно попытаться менять связь между модами и добиться их синхронизации, называемой в данном контексте также *захватом мод* (*mode locking*).

С точки зрения синхронизации, моды можно рассматривать как отдельные взаимодействующие автоколебания.<sup>4</sup> Захват мод часто наблюдается в лазерах, см. [Siegman 1986].

#### 4.1.6 Релаксационные осцилляторы. Пример: клетки истинного и латентного водителей ритма синоатриального узла

Взаимодействие двух релаксационных осцилляторов может осуществляться различными способами. Например, каждый осциллятор может менять порог другого; подобный механизм синхронизации рассматривался Ланда [1980] для двух электронных генераторов пилообразного напряжения. Здесь мы кратко обсудим случай генераторов «накопление–сброс», *взаимодействующих через обмен импульсами*, эта модель важна в ряде биологических приложений.

<sup>4</sup> В фазовом пространстве захват мод отвечает переходу от движения на торе к движению на предельном цикле, лежащем на торе. С топологической точки зрения это неотличимо от случая двух связанных автоколебательных систем.

Предположим, что осцилляторы независимы в течение периодов накопления, а когда в одном из них происходит сброс, то медленно растущая переменная другого увеличивается скачком (ср. со случаем импульсного воздействия на рис. 3.25). Легко понять, что более быстрый осциллятор заставляет более медленный колебаться со своей частотой (если только расстройка не очень велика). Ясно также, что этот же механизм приведет к синхронизации в ансамблях элементов, где сброс осциллятора приводит к сбросу других. Этот случай *глобальной связи* будет рассмотрен в разделе 4.3; здесь же мы проиллюстрируем синхронизацию связанных через импульсы осцилляторов следующим примером.

Мы уже отмечали, что синоатриальный узел сердца можно рассматривать как релаксационный генератор, вызывающий (в нормальном случае) сокращения сердца. Частота этого осциллятора регулируется автономной нервной системой; в случае некоторых па-

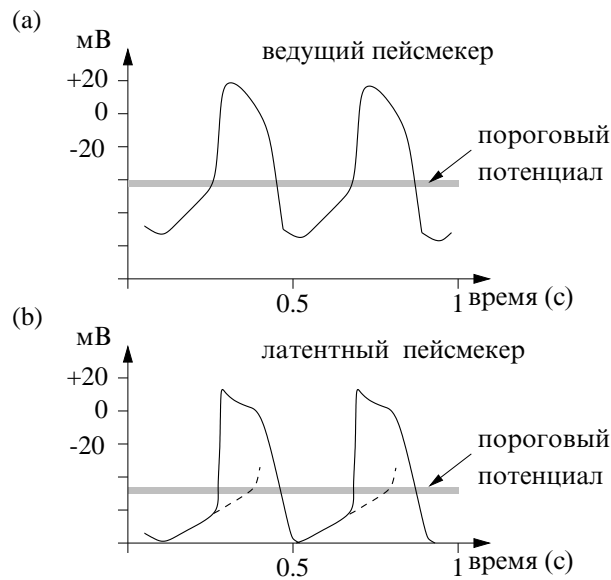


Рис. 4.9. Синхронизация истинной и латентной клеток-пейсмейкеров синоатриального узла сердца. Мембранный потенциал каждой клетки растет, пока не достигнет критического значения, после чего генерируется потенциал действия и мембранный потенциал сбрасывается. Порог сначала достигается истинным водителем ритма (а), и разряд этой клетки заставляет латентный водитель ритма (б) генерировать импульс активности еще до достижения порога. Без взаимодействия латентный водитель ритма генерировал бы потенциал действия позже (штриховая линия). Из [Dudel and Trautwein 1958], см. также [Шмидт и Тевс 1983].



тологий, когда частота становится слишком низкой, синоатриальный узел может быть захвачен искусственным водителем ритма (см. раздел 3.3).

На микроскопическом уровне синоатриальный узел можно рассматривать как совокупность большого числа генерирующих ритм клеток. Когда одна из этих клеток (истинный водитель ритма) сбрасывается («стреляет»), возникающий ток заставляет другие клетки (латентные, скрытые водители ритма) генерировать потенциал действия раньше, чем они бы это сделали без воздействия (рис. 4.9). Таким образом, генерируемый синоатриальным узлом ритм формируется совместным синхронным разрядом большого количества клеток [Шмидт и Тевс 1983]; этот ритм определяется клетками, имеющими наибольшую частоту [Гельфанд и др. 1963]. Это обеспечивает высокую надежность функционирования первичного водителя ритма сердца: если, вследствие каких-либо причин, наиболее быстрая клетка не в состоянии сгенерировать импульс, то генерация задается другой клеткой.

#### 4.1.7 Синхронизация в присутствии шума. Пример: активность мозга и мышц при болезни Паркинсона

Влияние шума на взаимную синхронизацию двух автоколебательных систем примерно такое же, как при захвате внешней силой (см. раздел 3.4). Типичные свойства взаимодействующих осцилляторов с шумом следующие.

- Между синхронными и несинхронными состояниями нет четкой границы, переход к синхронизации размыт.
- В синхронном режиме периоды почти постоянной (но флуктуирующей) разности фаз перемежаются проскоками фазы, при которых разность фаз относительно быстро увеличивается или уменьшается на  $2\pi$ .

Проиллюстрируем эти свойства на экспериментальном примере.

Ниже мы приводим результаты анализа данных мозговой и мышечной активности пациента, страдавшего болезнью Паркинсона. Мы анализируем записи колебаний магнитного поля, измеренные на поверхности черепа (такая запись называется магнитной энцефалограммой (МЭГ) [Hämäläinen *et al.* 1993]), и одновременно регистрировавшуюся электрическую активность (электромиограмму,

ЭМГ) одной из мышц руки. Детали эксперимента, предварительной обработки данных и обсуждение результатов можно найти в [Tass *et al.* 1998, 1999; Tass 1999]. Целью эксперимента было выяснение электрофизиологии паркинсонического тремора.<sup>5</sup> Динамика генерации тремора покоя до сих пор не понята окончательно. Известно, что в генерации участвуют несколько взаимодействующих колебательных систем [Volkmann *et al.* 1996], но роль их синхронизации в возникновении патологической активности пока не ясна. В частности, открытым вопросом остается возможность синхронизации активно-

<sup>5</sup> Тремор — это непроизвольное дрожание рук. При данном заболевании тремор в покое имеет частоту около 3–8 Гц и обычно уменьшается или исчезает при целенаправленном движении [Elble and Koller 1990].

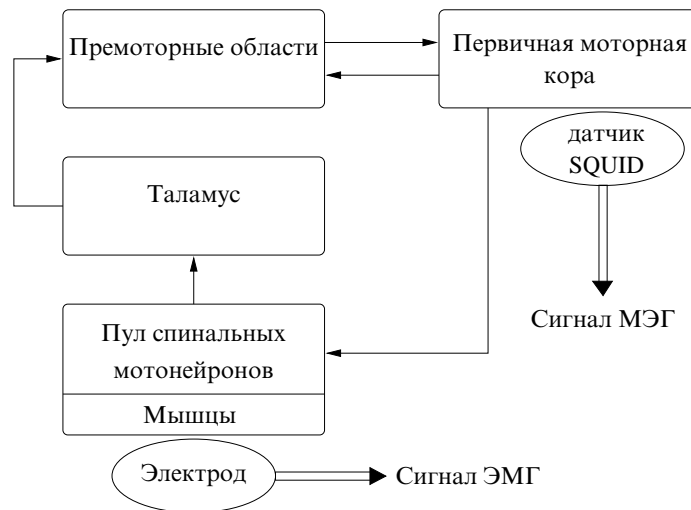


Рис. 4.10. В генерации тремора покоя при болезни Паркинсона задействованы разделы мозжечка, спинной мозг, периферийные нервы и мышцы. Volkmann *et al.* [1996] предполагают, что ритмическая активность таламуса воздействует на премоторные области (премоторная кора и дополнительная моторная область), которые воздействуют на первичную моторную кору. Последняя воздействует на пул спинальных мотонейронов, что создает ритмическую мышечную активность. Периферийные цепи обратной связи достигают двигательной коры через таламус. Активность двигательной коры характеризуется магнитным полем (МЭГ сигнал), регистрируемым на поверхности головы с помощью сверхпроводящих устройств (SQUID), в то время как активность спинального мотонейронного пула отражается в электрической активности мышц, измеряемой поверхностными электродами (ЭМГ сигнал). Анализируя эти сигналы, мы получаем информацию о взаимодействии между соответствующими осцилляторами.

сти областей коры во время тремора, а также – синхронизованы ли сокращения мышц с активностью мозга. Обсудим анализ сигналов от двух элементов сложной системы, схематически представленной на рис. 4.10.

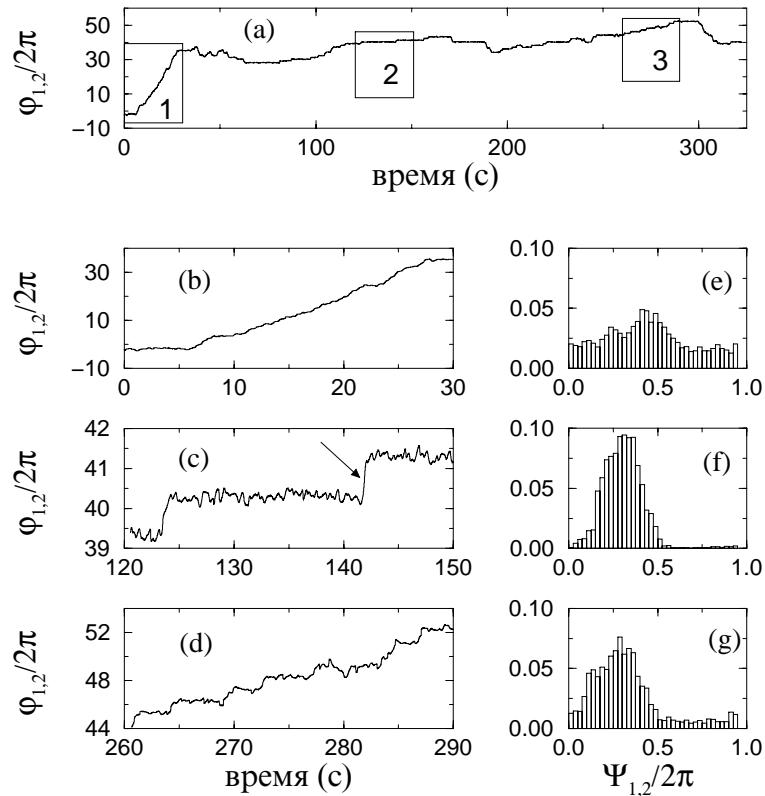


Рис. 4.11. (а) Зависимость от времени разности фаз порядка 1 : 2,  $\varphi_{1,2} = \phi_{\text{MEG}} - 2\phi_{\text{EMG}}$ , демонстрирует поведение, типичное для взаимодействующих осцилляторов в присутствии шума. Три интервала длиной 30 с, показанные прямоугольниками 1, 2 и 3, увеличены в (b), (c) и (d), соответственно. Эти интервалы существенно различаются из-за нестационарности системы (тремор возникает примерно через 50 с после начала записи). В течение первых 30 с осцилляторы можно считать асинхронными (b): разность фаз возрастает и распределение циклической разности фаз  $\Psi_{1,2} = \varphi_{1,2} \bmod 2\pi$  почти равномерно (e). Интервалы, показанные в (c) и (d), и соответствующие унимодальные распределения  $\Psi$  в (f) и (g) выявляют синхронизацию взаимодействующих систем, хотя степень синхронизации различается. Проскок фазы, показанный стрелкой в (c), увеличен на рис. 4.12. Из [Rosenblum *et al.* 2000], Fig. 2, Copyright Springer-Verlag.

Для конкретного набора данных частоты сигналов ЭМГ и МЭГ равны  $\approx 6$  Гц и  $\approx 12$  Гц, соответственно,<sup>6</sup> поэтому мы ожидаем найти синхронизацию порядка 1 : 2. Рисунок 4.11а показывает разность фаз  $\phi_{\text{МЭГ}} - 2\phi_{\text{ЭМГ}}$  между сигналом от двигательной коры и ЭМГ.<sup>7</sup> Отметим, что анализируемая система *нестационарна*, т.е. ее параметры (например, частоты осцилляторов, сила связи между ними) изменяются во времени. Качественное изменение происходит в момент времени  $\approx 50$  с, когда возникает тремор. Нестационарность отражается в поведении разности фаз: она растет в течение некоторых эпох (несинхронные состояния) и флуктуирует вокруг постоянного уровня в другое время (синхронные состояния). Мы видим, что во время синхронных эпох разность фаз напоминает случайные блуждания, как мы и ожидали для осцилляторов с шумом. Из-за нестационарности степень синхронизации изменяется во времени. В интервале времени, показанном на рис. 4.11b, разность фаз возрастает (за исключением первых 5 с) и распределение циклической разности фаз – широкое, что типично при отсутствии синхронизации (ср. с рис. 3.38). Во время других интервалов, показанных на рис. 4.11c и рис. 4.11d, колебания могут считаться синхронными. На рис. 4.11c

<sup>6</sup> Частоты оценивались с помощью спектрального анализа. Отметим также, что данные были предварительно отфильтрованы полосовым пропускающим фильтром, чтобы отделить интересующий нас сигнал от остальной активности.

<sup>7</sup> Мгновенные фазы вычисляются по МЭГ и ЭМГ сигналам с помощью преобразования Гильберта. Технические детали подробно обсуждаются в главе 6 и приложении П2.

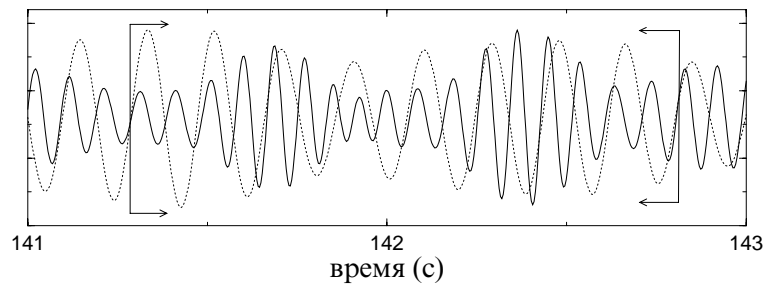


Рис. 4.12. Проскок фазы занимает несколько периодов. Медленный сигнал (пунктир) – это ЭМГ, быстрый сигнал (жирная линия) – это МЭГ (оба сигнала даны в произвольных единицах). Внутри отмеченного участка мы видим 8 и 17 циклов ЭМГ и МЭГ соответственно. В большем масштабе времени разность фаз выглядит как скачок (ср. с рис. 4.11).

мы видим два проскока фазы, а на рис. 4.11d они более частые, так что в течение этих интервалов осцилляторы «менее синхронны» (напомним, что для систем с шумом нет четко определенной границы синхронизации).

Сравнительно быстрые прыжки фазы на  $2\pi$ , хорошо видные на рис. 4.11 (а, с и d), – это то, что мы называем проскоками фазы. Детальное рассмотрение показывает, что проскок – это не мгновенное событие, а происходящее в течение нескольких периодов колебаний (рис. 4.12). Действительно, вне помеченного участка один цикл ЭМГ соответствует в точности двум циклам МЭГ, в то время как внутри этого участка мы наблюдаем 8 и 17 циклов соответственно.

#### 4.1.8 Синхронизация ротаторов. Пример: контакты Джозефсона

Здесь мы кратко обсудим особый класс систем, которые не являются автоколебательными, и поэтому их рассмотрение не лежит в основном русле этой книги. Это – **ротаторы**; примером служит, например, ротор электрического мотора. Частоту вращения можно рассматривать как аналог частоты колебаний, и естественно исследовать, могут ли связанные ротаторы подстраивать свои частоты. (Отметим, что в данном случае бессмысленно говорить об амплитуде.)

Уже в конце девятнадцатого века было известно, что при определенных условиях генераторы электростанций, работая на общую нагрузку, синхронизируются. Этот эффект исключительно важен для нормальной работы электрических сетей. Действительно, потеря синхронизации одним из генераторов может привести к серьезной поломке или даже к катастрофе. Теоретически это исследовалось в [Ollendorf and Peters 1925–1926].

В 1940-х годах И. И. Блехман и соавторы наблюдали в эксперименте синхронизацию разбалансированных ротаторов, приводимых в движение моторами: два ротора на общей вибрирующей основе вращались с одной и той же частотой. Действительно, поскольку роторы разбалансированы, они вызывают вибрацию основы с частотой вращения, так что системы «чувствуют» друг друга. Этот эффект взаимной синхронизации вращающихся электромеханических систем нашел ряд приложений в инженерной механике (см. описание, теорию и дальнейшие ссылки в [Блехман 1971, 1981; Blekhnman *et al.* 1995]).

В последнее время большой интерес привлекли сверхпроводящие электронные устройства – контакты Джозефсона. Оказывается, ди-

динамика такого контакта с параллельно подключенной емкостью, питаемого постоянным внешним током, описывается точно теми же уравнениями, что и динамика механического маятника под действием постоянного момента силы (см. раздел 7.4). Поэтому контакт Джозефсона можно рассматривать как «электрический ротатор». Экспериментально показано, что «вращения» можно синхронизовать периодическим внешним током (рис. 4.13) или связывая два контакта (рис. 4.14). Обзор этих эффектов содержится в [Jain *et al.* 1984].

На качественном уровне синхронизацию ротаторов можно объяснить, используя их сходство с колебательными системами. Состояние ротатора однозначно определяется двумя величинами – углом и скоростью вращения. Поскольку угол – это  $2\pi$ -периодическая переменная, фазовое пространство ротатора – это не плоскость, как у простейших осцилляторов, а цилиндр. Вращения под действием постоянного момента отвечают движению точки по замкнутой кривой, охватывающей цилиндр. Эта кривая обладает тем же свойством нейтральной устойчивости по отношению к возмущениям вдоль тра-

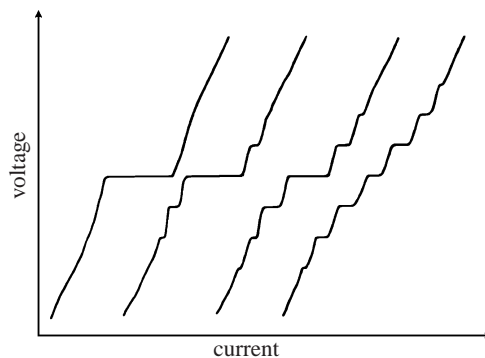


Рис. 4.13. Вольт-амперная характеристика контакта Джозефсона с периодической внешней силой. Самая левая кривая отвечает автономному контакту, а три другие получены при возрастающем значении амплитуды силы. (Эти кривые для наглядности произвольно сдвинуты вдоль оси тока.) Ток и напряжение соответствуют моменту силы и частоте вращения ротатора. При малом токе (моменте силы) вращения нет из-за диссипации, и поэтому напряжение равно нулю (см. полку на первой кривой). Большой ток приводит к вращению, направление которого зависит от направления тока; это отражается в ненулевом напряжении. Если приложена дополнительная периодическая сила, то наблюдаются дополнительные полки, называемые ступеньками Шапи-ро [Shapiro 1963]. Они соответствуют областям захвата частоты вращения частотой внешнего тока. Чем больше сила, тем большее число областей синхронизации видно на характеристике. Из [Кулик и Янсон 1970].

ектории, что и предельный цикл автоколебательной системы.<sup>8</sup> Следовательно, вращения можно синхронизовать.

#### 4.1.9 Несколько осцилляторов

Синхронизация наблюдается и при взаимодействии более чем двух осцилляторов. Обсуждение больших ансамблей мы отложим до разделов 4.2 и 4.3. Здесь же мы остановимся на синхронизации нескольких осцилляторов.

Свойства синхронизации зависят от числа осцилляторов, а также от вида и силы взаимодействия между каждой парой. Поэтому задача описывается многими параметрами, и возможны различные синхронные состояния, не только синфазные и противофазные.

Более того, при сложных видах связи могут сосуществовать несколько устойчивых фазовых конфигураций. В этом случае связанные системы демонстрируют мультистабильность: которая из конфигураций реализуется, зависит от начальных условий (в фазовом пространстве это отвечает существованию нескольких аттракторов с различными областями притяжения).

Мы не будем углубляться в рассмотрение этой сложной задачи (некоторые случаи рассмотрены в [Ланда 1980; Collins and Stewart

<sup>8</sup> Другими словами, у замкнутой траектории на цилиндре один ляпуновский показатель равен нулю.

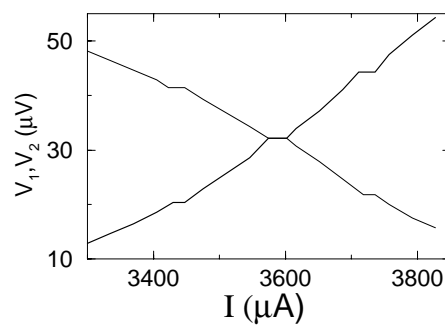


Рис. 4.14. Вольт-амперная характеристика двух связанных контактов Джозефсона демонстрирует эффект взаимной синхронизации. При изменении тока выявляются области захвата 1 : 1 и 1 : 2, где  $nV_1 = mV_2$  (напряжение пропорционально частоте вращения). Воспроизведено из *Physics Reports*, 1984, Vol. 109, А. К. Jain, Mutual phase-locking in Josephson junction arrays, pp. 309–426. Copyright 1984, с разрешения издательства Elsevier Science.

1993]), а приведем пример, демонстрирующий возможность сложного поведения уже в нескольких идентичных осцилляторах. Так, уже три осциллятора, соединенные в кольцо, могут находиться в трех устойчивых синхронных конфигурациях в зависимости от параметров связи.<sup>9</sup> (i) все элементы синхронизованы синфазно; (ii) они сдвинуты по фазе на  $2\pi/3$  по отношению к соседям; (iii) два осциллятора колеблются синфазно, а третий элемент имеет другую фазу [Ланда 1980].

В качестве другого примера рассмотрим кольцо из четырех одинаковых осцилляторов (рис. 4.15а). Если связь притягивающая по фазам, то все генераторы синхронизируются в синфазном режиме (рис. 4.15б). При отталкивании фаз элементы образуют две синфазные синхронные пары (рис. 4.15с), а симметричная конфигурация с разностью фаз между соседями  $\pi/2$  оказывается неустойчивой.

Свойство нескольких синхронизованных осцилляторов демонстрировать состояния с различным сдвигом фаз позволило выдвинуть гипотезу, что этот эффект используется центральной нервной системой для реализации разных походок [Collins and Stewart 1993; Strogatz and Stewart 1993]. Согласно этой гипотезе, каждая нога контролируется соответствующим автогенератором (центральным генератором ритма, или ЦГР). В случае двуногой ходьбы, синфазные и противофазные синхронные состояния этих генераторов соответствуют прыжкам и шаганию. Различные аллюры четвероногих (иноходь,

<sup>9</sup> Взаимодействие в этом примере отвечает связи электронных автогенераторов через сопротивления и емкости, и в общем случае связь не симметрична. Поэтому она характеризуется несколькими параметрами.

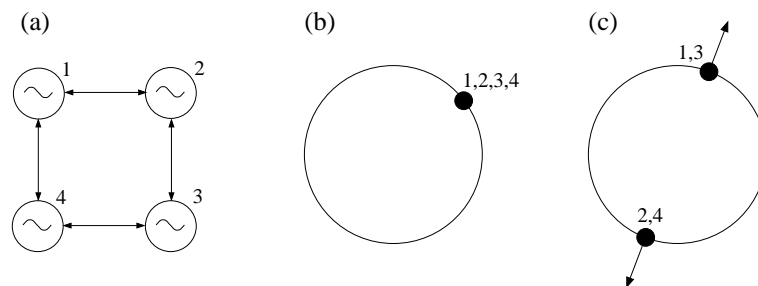


Рис. 4.15. (а) Четыре идентичных осциллятора соединены в кольцо; каждый взаимодействует с двумя соседями. (б) При связи, притягивающей фазы, наблюдается синфазное состояние. (с) При отталкивании фаз образуется конфигурация, при которой невзаимодействующие элементы (1 и 3, 2 и 4) имеют одинаковые фазы, а взаимодействующие соседи находятся в противофазе.



рысь, галоп) соответствуют различным синхронным состояниям системы из четырех осцилляторов.

## 4.2 Цепочки, решетки и колебательные среды

В этом разделе мы опишем синхронизацию в больших упорядоченных ансамблях осцилляторов. Это означает, что системы составляют упорядоченную пространственную структуру. Простейший пример – это цепочка, в которой каждый элемент взаимодействует с ближайшими соседями; если первый и последний элементы цепочки также связаны, то получается кольцо. В общем случае и пространственное расположение, и взаимодействие могут быть более сложными, например осцилляторы могут взаимодействовать с несколькими соседями. Интересный специальный случай, когда каждый осциллятор взаимодействует со всеми другими, рассматривается отдельно в разделе 4.3. Мы рассмотрим также колебательные среды, в которых осцилляторы непрерывно распределены по пространству.

Представим, что частоты различных осцилляторов слегка отличаются. Какое коллективное поведение может наблюдаться в таком ансамбле? Конечно, если взаимодействие очень слабое, то синхронизации не будет и каждая система будет колебаться со своей частотой. Можно представить также, что достаточно сильная связь синхронизует весь ансамбль, если только собственные частоты не слишком различаются (раздел 4.2.1). В промежуточном случае можно ожидать появление частично синхронизованных состояний. Действительно, несколько осцилляторов могут синхронизоваться и колебаться с одной частотой, отличающейся от частоты соседей (раздел 4.2.2). Могут наблюдаться несколько таких групп, называемых **кластерами** синхронных элементов. Такое рассмотрение справедливо и для сплошной среды, где каждая точка может рассматриваться как осциллятор (разделы 4.2.3 и 4.2.4). Мы проиллюстрируем эти соображения несколькими примерами.

### 4.2.1 Синхронизация в цепочке. Пример: цепочка лазеров

Синхронизация в цепочке лазеров часто используется для получения излучения большой интенсивности. Этого можно достигнуть, расположив лазеры в линию, так что каждый взаимодействует с

ближайшими соседями или со всеми другими лазерами. Мы опишем эксперименты с  $\text{CO}_2$ -лазерами, выполненными Гловой и др. [1996]. В этих экспериментах связь между пятью лазерами осуществлялась путем расположения пространственного фильтра между цепочкой и внешним зеркалом. При такой конфигурации каждый лазер взаимодействует с остальными четырьмя, но сила связи зависит от расстояния между лазерами (рис. 4.16). Результаты, представленные на рис. 4.17, четко указывают на синхронизацию. Действительно, если бы лазеры были не синхронизованы, то излучение в дальней зоне представляло бы собой сумму некогерентных колебаний, и потому было бы пространственно однородным. Неоднородность распределения на рис. 4.17 появляется из-за захвата фаз; это типичная интерференционная картина.

Эта же группа исследователей провела эксперимент с многопучковым  $\text{CO}_2$ -лазером, состоящим из 61 стеклянной трубки. Трубки были

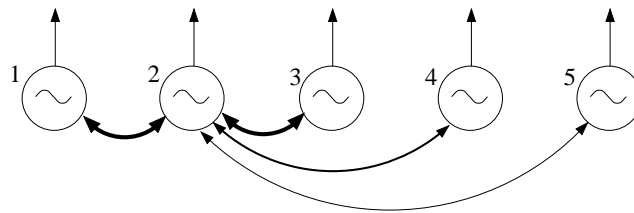


Рис. 4.16. Схема лазерного эксперимента [Глова и др. 1996]. Связь между лазерами уменьшается с расстоянием между ними; это схематически показано толщиной стрелки, обозначающей связь (она показана только для второго лазера).

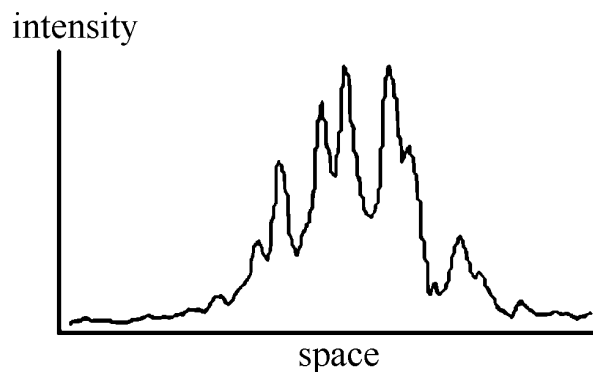


Рис. 4.17. Интенсивность излучения в дальней зоне при слабой связи лазеров. Из-за захвата фаз отдельных лазеров наблюдается интерференция. Из [Глова и др. 1996].

расположены в виде сот [Антюхов и др. 1986]; это пример двумерной решетки (рис. 4.18a). Связь между лазерами осуществлялась через внешнее зеркало. В этом случае индикатором синхронизации также служило неравномерное распределение излучения в дальней зоне (рис. 4.18b, c и d).

#### 4.2.2 Образование кластеров. Пример: электрическая активность кишечника млекопитающих

Кишка состоит из слоев мышечных волокон, по которым от ротового к абсорбальному концу может распространяться бегущая волна электрической активности. Эта волна вызывает волну сокращения мышц. В работе [Diamant and Bortoff 1969] экспериментально исследовалось распределение частот электрической активности вдоль кишки. Большая часть экспериментов проводилась на кошках; основные наблюдения повторялись на собаках и макаках. Частоты определялись путем усреднения по пятиминутному интервалу времени.

С физической точки зрения, если ограничиться только электрической активностью, то кишку можно рассматривать как одномерную среду, в которой каждая точка – колебательный элемент. Действительно, Diamant and Bortoff [1969] обнаружили, что, если часть кишки разрезать на кусочки, то каждый из них демонстрирует почти синусоидальные колебания с постоянной частотой. Эти частоты уменьшаются от ротового к абсорбальному концу с почти постоянным градиентом. Частота электрической активности, измеренная *in situ* и отложенная как функция координаты вдоль кишки, обычно имеет вид ступенек (рис. 4.19). Это указывает на существование кластеров

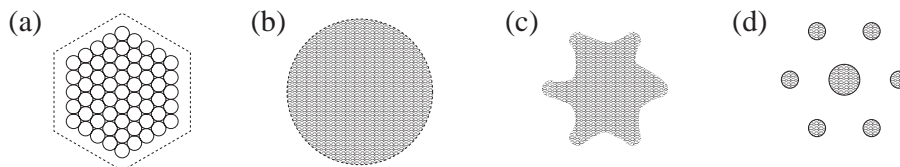


Рис. 4.18. Синхронизация в решетке из 61 лазера, которые были расположены в виде сот (a). При слабой связи интенсивность в фокальном пятне примерно однородна (b). Синхронизация при более сильной связи проявляется в пространственно упорядоченном распределении интенсивности (d). Случай промежуточной связи показан на рисунке (c). Нарисовано схематически по данным [Антюхов и др. 1986].

синхронной активности.<sup>10</sup> В каждом кластере сдвиг фаз между колебаниями увеличивается с пространственной координатой (в соответствии с градиентом собственных частот); соседние кластеры разделены областями модулированных колебаний, или биений (рис. 4.20). В англоязычной физиологической литературе такое поведение во времени часто называют структурой *waxing and waning* (подъем – спад). Отметим, что кластеры в основном формируются на ротовом конце кишки, где относительная расстройка  $\Delta f/f$  меньше.

### 4.2.3 Кластеры и биения в среде: подробное рассмотрение

Образование кластеров в непрерывной колебательной среде (в нашем примере это маскулатура кишечника) является результатом

<sup>10</sup> Образование кластеров в цепочке слабосвязанных генераторов Ван-дер-Поля исследовалось численно Eymontout and Korell [1984]; они моделировали таким образом явление синхронизации в кишечнике.

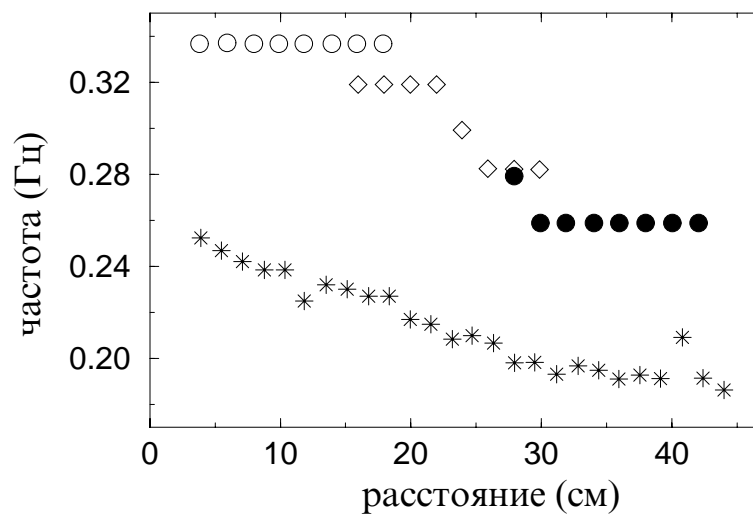


Рис. 4.19. Синхронные кластеры в кишке млекопитающего. График частоты медленной электрической активности мышц как функции координаты вдоль кишки обычно демонстрирует ступеньки. (Расстояние измерялось от связки Трейтца.) Символы  $\circ$ ,  $\diamond$ , и  $\bullet$  отвечают трем последовательным (с интервалом 30 минут) измерениям частоты вдоль кишки *in situ*; при каждом измерении электроды переставлялись. Звездочки отвечают частотам разных сегментов той же кишки *in vitro*. Из [Diamant and Bortoff 1969].

двух противоположных факторов: неоднородности распределения собственных частот и связи, которая старается уравнивать состояния систем. Такая связь часто возникает вследствие диффузии, и поэтому называется диффузионной. Рассмотрим, что происходит на границе двух кластеров, имеющих разные частоты. Здесь важно различать случаи дискретной цепочки и непрерывной среды.

В дискретной цепочке граница между двумя кластерами есть граница между двумя осцилляторами, имеющими разные частоты. Это просто означает, что они не захвачены: каждый колеблется со своей частотой. В отличие от этого, если в сплошной среде два осциллятора в двух пространственных точках имеют разные частоты, то между ними должен быть непрерывный переход. На первый взгляд, можно просто провести непрерывный профиль частот, соединяющий эти точки. Более детальное рассмотрение показывает, что это невозможно. Действительно, разные частоты отвечают разным скоростям вращения фазы. Поэтому разность фаз между точками, принадлежащими к двум кластерам, растет во времени со скоростью, пропорциональной разности частот. Следовательно, профиль фазы

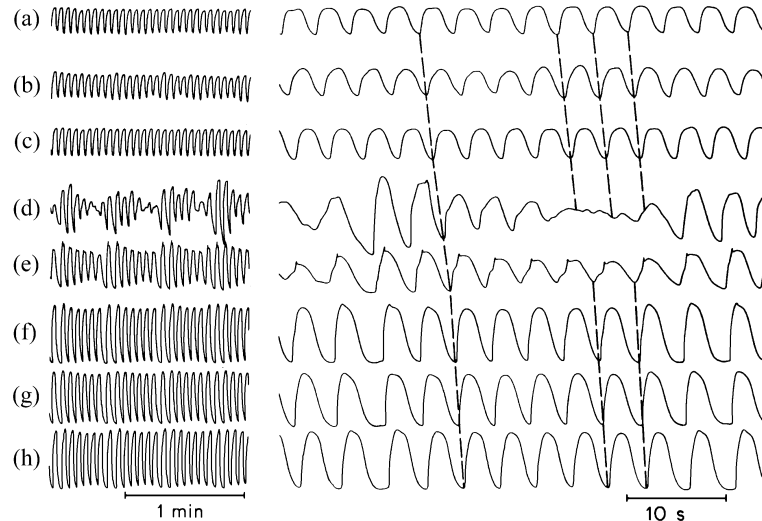


Рис. 4.20. Электрическая активность кишки кошки, измеренная *in situ* с помощью восьми эквидистантно расположенных электродов. Первые три измерения (а, б и в) принадлежат одному кластеру с частотой колебаний 0.29 Гц. Три последних электрода (f, g и h) измеряют активность другого кластера, имеющего частоту 0.26 Гц. На границе между этими кластерами наблюдаются модулированные колебания, или биения (d и e). Штриховые линии отвечают линиям постоянной фазы. Из [Diamant and Bortoff 1969].

становится все более наклонным. С другой стороны, непрерывный крутой профиль фазы означает, что в среде образуются волновые структуры с все меньшей и меньшей длиной волны. Рост разности фаз между кластерами приводит к укорочению длины волны со временем. Ясно, что этот процесс долго продолжаться не может – и действительно, среда находит выход из этой коротковолновой катастрофы. Увеличивающийся градиент фазы уменьшается за счет *пространственно-временного дефекта*. Дефект образуется, когда амплитуда колебаний обращается в ноль, он позволяет сохранить градиент фазы конечным.

Чтобы продемонстрировать, как возникает пространственно-временной дефект, предположим, что разность фаз между точками 1 и 2, принадлежащими разным кластерам, достигла значения  $\approx 2\pi$ . Если бы между 1 и 2 не было среды, то мы бы просто считали состояния в этих точках почти идентичными. В среде, однако, существует непрерывный профиль фазы между этими точками. Представляя как амплитуду, так и фазу в полярных координатах, мы можем изобразить поле окружностью, см. рис. 4.21. Рассмотрим теперь влияние связи в среде на профиль амплитуды и фазы. Типичная связь – диффузионная, или, по крайней мере, имеет диффузионную компоненту; она стремится уменьшить разность между состояниями ближайших соседей, т.е. уменьшить разность между состояниями в точках 1 и 2 на рис. 4.21. Единственная возможность добиться этого – это уменьшить амплитуду колебаний. Из рис. 4.21 видно, что такое уменьшение амплитуды действительно превращает профиль фазы между 1 и 2 из окружности в почти точку. В конечном состоянии фазы в точках 1 и 2 почти равны, хотя изначально они различались на

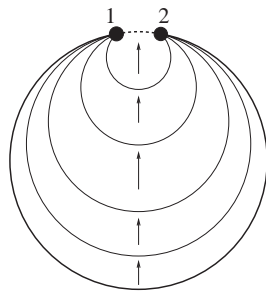


Рис. 4.21. Иллюстрация пространственно-временного дефекта. Начальный профиль фазы и амплитуды между точками 1 и 2 показан жирной сплошной линией. С течением времени амплитуда уменьшается и профиль меняется, как показано стрелками. В конечном состоянии (пунктирная линия) разность фаз между точками 1 и 2 близка к нулю.

$2\pi$ . Таким образом, можно сказать, что пространственно–временной дефект «съедает» разность фаз  $2\pi$ . Как ясно из рис. 4.21, это возможно, только если в некоторой пространственной точке в некоторый момент времени амплитуда обращается в ноль. Это можно понять следующим образом: если амплитуда всегда и везде больше нуля, то фаза всегда и везде хорошо определена, и не существует возможности устранить большие градиенты фазы. Напротив, в состоянии с исчезающе малой амплитудой фаза не определена, поэтому единственная возможность изменить профиль фазы – это пройти через такое состояние. Мы отсылаем читателя к рис. 4.20d, где приведен пример пространственно–временного дефекта в природной системе.

#### 4.2.4 Колебательная среда под периодическим воздействием. Пример: воздействие на реакцию Белоусова–Жаботинского

Реакция Белоусова–Жаботинского – это хорошо известный пример колебательного химического процесса (см., например, [Kargal and Showalter 1995] и приведенные там ссылки). Протекание этой реакции сопровождается периодическим изменением цвета среды.

Petrov *et al.* [1997] экспериментировали со светочувствительной формой такой реакции, используя периодическое оптическое воздействие. Реакция протекала в тонкой мембране, расположенной между двумя резервуарами реагентов. При данных условиях автономная (т.е. без воздействия) частота была  $f_0 = 0.028$  Гц. Если среда некоторое время подвергалась воздействию яркого света, который задавал одинаковые начальные условия для каждой точки среды, то, после его выключения, среда осциллировала однородно в течение нескольких циклов, так что собственная частота могла быть измерена. Тем не менее, наличие границы и неидеальности среды всегда приводили к разрушению однородных колебаний и возникновению вращающихся спиралей.

Если на реакцию воздействовали пространственно однородными импульсами света с частотой  $f_e$ , то, в зависимости от  $f_e$ , наблюдалось несколько  $n : m$  синхронных состояний. В этом случае воздействие разрушало спиральные волны и возникали различные пространственные структуры. Так, при захвате порядка  $1 : 1$  среда осциллировала однородно с частотой силы. В области синхронизации порядка  $1 : 2$  система была бистабильной: в зависимости от начальных усло-

вий наблюдались либо два облака<sup>11</sup> синхронно колеблющихся точек со сдвигом фазы на  $\pi$  между облаками, либо лабиринтная структура (рис. 4.22). При захвате порядка  $1 : 3$  были видны три однородно осциллирующих облака. Структура языков Арнольда в периодически возмущаемой реакции Белоусова—Жаботинского исследовалась также в работе [Lin *et al.* 2000].

Отметим, что причина образования облаков в среде Белоусова—Жаботинского с внешней силой отличается от причины образования кластеров в кишечнике. В последнем случае кластеры возникают за счет неоднородности среды (точки с близкими частотами стремятся сгруппироваться). В данном примере механизм другой: каждая точка стремится синхронизоваться с внешней силой, а также с соседними точками. Если бы не было взаимодействия в среде (в этом случае мы вернулись бы к случаю многих невзаимодействующих осцилляторов, захваченных общей внешней силой, см. раздел 3.6.4), то при захвате порядка  $1 : m$  соседние точки с равной вероятностью имели

<sup>11</sup> Мы предпочитаем не использовать здесь термин «кластеры», поскольку различные облака имеют одну и ту же частоту и различаются только фазами.

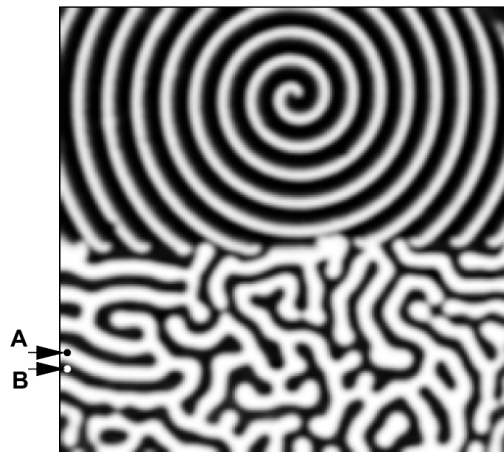


Рис. 4.22. Пример лабиринтной структуры, возникающей при захвате порядка  $1 : 2$ . Верхняя часть реактора содержалась в темноте; наблюдаемая в этой части спиральная волна типична для автономной колебательной среды. Нижняя часть реактора освещалась импульсами света с частотой  $f_e \approx 2f_0$ . Временная зависимость колебаний в точках А и В показана на рис. 4.23. Воспроизведено с разрешением из *Nature* [Petrov *et al.* 1997]. Copyright 1997 Macmillan Magazines Limited.



бы разность фаз  $2\pi/m \cdot i$ , где  $i = 1, \dots, m-1$ .<sup>12</sup> Из-за взаимодействия точки стремятся иметь те же фазы, что и соседи, и компромисс достигается за счет образования облаков. Очевидно, что разность фаз между облаками равна  $2\pi/m \cdot i$ .

### Синхронизация движения острия спиральной волны

Другой эффект синхронизации в непрерывной среде изучался экспериментально и теоретически в работе [Steinbock *et al.* 1993]. В их установке колебательная химическая система (реакция Белоусова–Жаботинского) освещалась с периодической модуляцией интенсивности. Наблюдался интересный режим, когда ядро спирали двигалось по одной из множества незамкнутых или замкнутых гиперциклоидальных траекторий в фазе с воздействующим освещением.

<sup>12</sup> Действительно, сдвиг во времени медленного сигнала на целое число периодов быстрого не меняет разности фаз между этими сигналами.

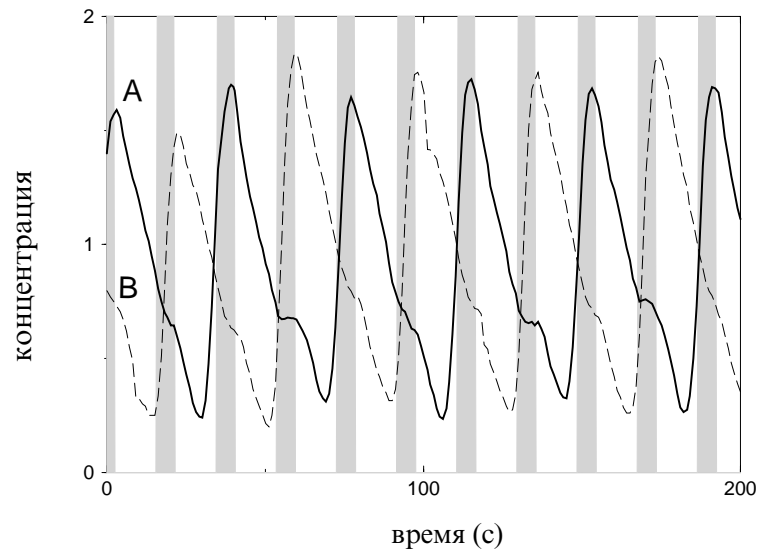


Рис. 4.23. Временная зависимость интенсивности среды в точке А (жирная кривая) и В (пунктир) на рис. 4.22. Заштрихованные серым полосы показывают время возмущения светом. Таким образом, белые и темные полосы в лабиринте представляют точки, синхронизированные с силой; сдвиг фазы между этими двумя группами равен  $\pi$ . Воспроизведено с разрешения из *Nature* [Petrov *et al.* 1997]. Copyright 1997 Macmillan Magazines Limited.

### 4.3 Глобально связанные осцилляторы

Теперь мы займемся изучением явлений синхронизации в больших ансамблях осцилляторов, в которых каждый элемент взаимодействует со всеми остальными (рис. 4.24а). Такую связь обычно называют *глобальной* или связью типа «каждый с каждым». В качестве характерных примеров мы уже упомянули синхронное испускание световых импульсов популяцией светлячков и синхронные аплодисменты в большой аудитории. Действительно, каждый светлячок подвержен влиянию светового поля, которое создается всей популяцией. Точно так же, каждый аплодирующий слышит звуки, производимые всеми остальными сидящими в зале. В другом примере на стрекочущего сверчка (см. [Walker 1969]) воздействуют своими песнями все его соседи. Ниже мы объясним, почему такая связь приводит к синхронизации в ансамбле, и проиллюстрируем это дальнейшими примерами.

#### 4.3.1 Самосинхронизация в ансамбле: переход Курамото

Светлячки не могут быть абсолютно одинаковыми, как не могут быть идентичными различные индивидуумы в коллективе *homo sapiens*. Следовательно, чтобы понять явление коллективной синхронности, мы должны рассматривать *ансамбль неидентичных осцилляторов*. Мы знаем, что системы могут синхронизоваться, если расстройка не слишком велика, и, следовательно, мы можем ожидать, что синхронизация может охватить всю популяцию, или, по крайней мере, большую ее часть.

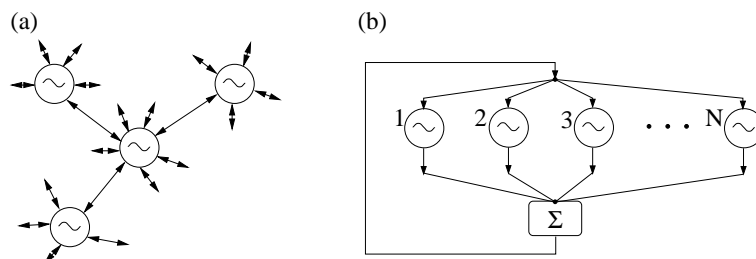


Рис. 4.24. (а) Каждый осциллятор в большой популяции взаимодействует со всеми остальными. Такое взаимодействие называется глобальной, или «каждый с каждым», связью. (б) Эквивалентное представление: каждый элемент ансамбля подвержен воздействию среднего поля, которое создается всеми элементами.

В качестве вспомогательного шага мы перерисуем рис. 4.24а в эквивалентном виде, показанном на рис. 4.24б. Здесь мы заменили сумму сил, действующих на осциллятор со стороны всех остальных, одной силой, действующей со стороны всего ансамбля. Действительно, можно сказать, что на каждый осциллятор действует сила, пропорциональная сумме колебаний всех осцилляторов в ансамбле.<sup>13</sup>

Схема на рис. 4.24б сильно напоминает рис. 3.51. Действительно, в обоих случаях на все осцилляторы действует общая сила, и, как мы уже знаем, эта сила может захватить многие осцилляторы, если их частоты близки. Проблема только в том, что, в случае глобальной связи, эта сила, или среднее поле, не задана изначально, а возникает из-за взаимодействия в ансамбле. Эта сила определяет, синхронизованы ли системы, но сама она зависит от их колебаний – это типичный пример самоорганизации. Чтобы качественно объяснить возникновение этой силы (или чтобы вычислить ее, что делается в разделе 12.1), мы рассмотрим эту проблему самосогласованно.

Предположим сначала, что среднее поле равно нулю. Тогда все элементы в ансамбле осциллируют независимо, и, как известно из раздела 3.6.4, их вклады в среднее поле практически компенсируются. Даже если частоты этих колебаний идентичны, но фазы независимы, среднее от выходов всех элементов ансамбля мало по сравнению с амплитудой одиночного осциллятора.<sup>14</sup> Таким образом, асинхронное состояние с нулевым полем удовлетворяет условию самосогласованности.

Далее, чтобы продемонстрировать, что синхронизация в ансамбле также возможна, мы предположим, что среднее поле не нулевое. Тогда, естественно, оно захватит по крайней мере часть популяции, выходы этих захваченных элементов будут суммироваться когерентно (ср. с разделом 3.6.4), и среднее поле получится ненулевым, как

<sup>13</sup> Обозначим выход каждого осциллятора  $x_k(t)$ , где  $k = 1, \dots, N$  – индекс осциллятора, а  $N$  – число элементов в ансамбле;  $x$  может быть изменением интенсивности света или акустического поля относительно некоего среднего значения, или в общем случае любой колебательной величиной. Такая сила, действующая на индивидуальный осциллятор, пропорциональна  $\sum_k x_k(t)$ . Принято писать эту пропорциональность в виде  $\varepsilon N^{-1} \sum_k x_k(t)$ , так что она включает нормализацию на число осцилляторов  $N$ . Член  $N^{-1} \sum_k x_k(t)$  есть просто среднее арифметическое от всех колебаний, поэтому такую связь часто называют связью через **среднее поле**.

<sup>14</sup> В соответствии с законом больших чисел оно стремится к нулю, когда число взаимодействующих элементов стремится к бесконечности; флуктуации среднего поля имеют порядок  $N^{-1/2}$ .

и предполагалось. Какое из этих двух состояний – синхронное или асинхронное – будет реализовано, или, другими словами, какое из них устойчиво, зависит от степени взаимодействия каждой пары и от того, насколько различаются элементы ансамбля. Сочетание этих двух факторов – силы связи и распределения автономных частот – определяют также, как много осцилляторов будет синхронизовано и, следовательно, как велико будет среднее поле.

Обсудим теперь, как происходит переход к синхронизации, взяв для примера аплодисменты в аудитории. Изначально каждый человек хлопает со своей индивидуальной частотой, и звук, который создает вся публика, – это просто шум.<sup>15</sup> Пока эти отклонения слабы и не имеют характерных частот, они не оказывают на ансамбль существенного влияния. Каждый осциллятор имеет свою собственную индивидуальную частоту  $\omega_k$ , каждый человек аплодирует и светлячок излучает вспышки в своем ритме, но всегда существует значение частоты, которое предпочитается большинством. Конечно, некоторые элементы ведут себя в очень индивидуалистической манере, но большая часть популяции стремится вести себя «как соседи». Так, частоты  $\omega_k$  распределены в некотором диапазоне, и это распределение имеет максимум вокруг наиболее вероятной частоты. Таким образом, всегда найдется хотя бы два осциллятора, имеющие близкие частоты, и, следовательно, легко синхронизирующиеся. В результате, вклад в среднее поле на частоте этих колебаний возрастет. Эта увеличившаяся компонента вынуждающей силы захватит, естественно, другие элементы с близкими частотами, что приведет к росту синхронного кластера и дальнейшему росту компоненты среднего поля на определенной частоте. Этот процесс развивается (быстро для релаксационных осцилляторов, относительно медленно для квазилинейных), и в конце концов почти все элементы присоединяются к большинству и осциллируют синхронно, а их общий выход – среднее поле – из шумового становится ритмическим.

Физический механизм, который мы описали, известен как переход Курамото [Kuramoto 1975]. Сценарий такого перехода может быть и более сложным, например, если распределение индивидуальных

<sup>15</sup> Естественно, что общее (среднее) акустическое поле – не нулевое, потому что каждое индивидуальное колебание положительно; интенсивность звука не может быть отрицательной, она колеблется между нулем и неким максимальным значением. Соответственно сумма этих колебаний содержит некую большую постоянную составляющую, а отклонения от этого среднего мы и рассматриваем как колебания среднего поля, и оно мало. Следовательно, аплодисменты воспринимаются как шум почти постоянной интенсивности.

частот  $\omega_k$  имеет несколько максимумов. В этом случае могут образоваться несколько синхронных кластеров; в конечном счете они могут как слиться, так и сосуществовать. Кластеризация может наблюдаться, например, и в случае, когда сила взаимодействия элемента ансамбля с его ближайшими в пространстве соседями больше, чем с удаленными.

Сценарий перехода Курамото не зависит от природы колебаний (биологические, электрические и т.д.) и от природы взаимодействия. В приведенных выше примерах связь осуществлялась через оптическое или акустическое поле. Глобальная связь электронных систем может быть реализована с помощью общей нагрузки (рис. 4.25); в этом случае напряжение, приложенное к индивидуальной системе, зависит от суммы токов через все элементы. (Пример с последовательно соединенными контактами Джозефсона приведен в разделе 12.3.) Химические осцилляторы могут быть связаны через общую среду, где концентрация реагентов зависит от реакции в каждом осцилляторе и, с другой стороны, воздействует на эти реакции. Один пример такой связи приведен в работе [Vanag *et al.* 2000], где изучалась динамика фоточувствительной реакции Белоусова–Жаботинского в тонком слое, подверженном освещению, интенсивность которого была функцией от средней концентрации одного из реагентов.<sup>16</sup> При достаточно сильном взаимодействии наблюдались синхронные состояния с различными, зависящими от начальных условий, структурами кластеров.

Иногда механизм взаимодействия между элементами ансамбля не вполне ясен. Проиллюстрируем это следующими примерами.

<sup>16</sup> В такой системе глобальная связь сосуществует с локальной диффузионной связью.

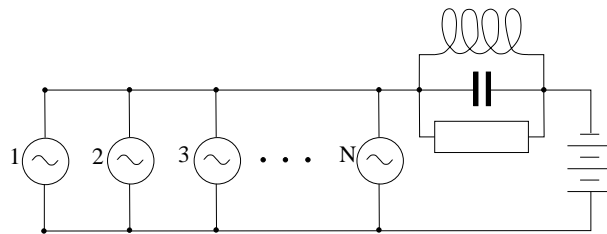


Рис. 4.25. Ансамбль электронных систем, глобально связанных через общую нагрузку. Среднее поле этой системы пропорционально току через нагрузку.

### 4.3.2 Пример: синхронизация менструальных циклов

Мы иллюстрируем наши теоретические рассуждения результатами [McClintock 1971], которая провела детальное исследование менструальных циклов у 135 женщин в возрасте 17–22 лет, проживавших в общежитии женского колледжа. Она показала повышение синхронности в наступлении начала цикла в течение учебного года (сентябрь–апрель). Это подтвердило ранние косвенные наблюдения, что образование социальных групп влияет на некоторые аспекты менструального цикла. Результаты McClintock соответствовали результатам экспериментов на мышах (см. ссылки в [McClintock 1971]), показавших, что образование групп влияет на баланс эндокринной системы. В частности, было показано, что дисперсия времен начала менструации в различных группах «близких подруг» внутри наблюдаемого коллектива уменьшалась в течение академического года; термин «близкие подруги» был принят для обозначения тех студенток, которые указали друг друга в списке тех, кого они наиболее часто видят и с кем проводят наибольшее время. Это исследование указало на существование у людей некоего межличностного взаимодействия, влияющего на менструальный цикл. Вопрос, является ли механизм этого явления феромональным,<sup>17</sup> или он основан на знании циклов среди подруг, или же на других процессах, остается открытым.

### 4.3.3 Пример: синхронизация гликолитических колебаний в популяции дрожжевых клеток

Мы уже упомянули, что химические осцилляторы могут быть связаны через общую среду. Действительно, предположим, что некоторое вещество производится в результате реакции и что скорость реакции зависит от концентрации этого вещества. Если среда постоянно перемешивается, то эта концентрация пространственно однородна и определяется всеми осцилляторами (рис. 4.26). Следовательно, ее можно рассматривать как среднее поле. Опишем пример такой системы.

Гликолитические автоколебания могут наблюдаться при определенных условиях в суспензии дрожжевых клеток в перемешиваемой

<sup>17</sup> Феромоны – это ароматические вещества, выделяемые животными и человеком и влияющие на сексуальное поведение и связанные с ним функции организма.

кювете (см. [Richard *et al.* 1996] и приведенные там ссылки). Эти колебания можно наблюдать, измеряя флуоресценцию одного из метаболитов, а именно NADH.<sup>18</sup>

Richard *et al.* [1996] рассмотрели две альтернативные гипотезы причин возникновения макроскопических колебаний NADH. Во-первых, можно предположить, что они возникают в результате суммирования одновременно индуцированных колебаний индивидуальных клеток. Действительно, гликолитические колебания индуцируются путем добавления глюкозы в голодающую клеточную структуру. Так как клетки не очень различны и начинают осциллировать в один и тот же момент времени, то можно ожидать, что, по крайней мере некоторое время, клетки останутся приблизительно в фазе. Альтернативная гипотеза – это синхронизация химических осцилляторов, глобально связанных через общую среду. Richard *et al.* [1996] подтвердили вторую гипотезу в следующем эксперименте. Они инициировали гликолитические колебания в двух популяциях клеток, так что сдвиг фаз между ними был около  $\pi$ , а затем смешали две эти популяции. Если бы клетки осциллировали независимо, то колебания компенсировали бы друг друга. Если же клетки взаимодействуют, то можно ожидать возникновения синхронизации в смеси двух изначально синхронных популяций. Последний эффект действительно наблюдался экспериментально: сразу же после смеси-

<sup>18</sup> NADH (никотинамидадениндинуклеотид) имеет свойство поглощать свет с определенной длиной волны; таким образом, концентрация NADH может определяться спектроскопически.

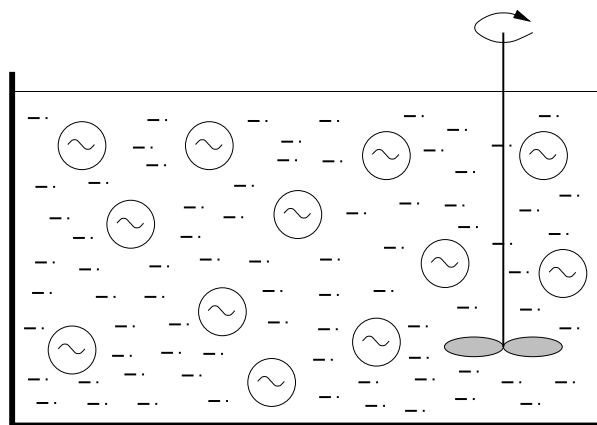


Рис. 4.26. Химические осцилляторы в перемешиваемом растворе глобально связаны через общую среду.

вания колебания NADH исчезли, но они вновь возникли примерно через три минуты (характерный период колебаний порядка 40 с). Далее Richard *et al.* [1996] показали, что внеклеточная концентрация свободного ацетальдегида колеблется с частотой внутриклеточных гликолитических колебаний. Они сделали вывод, что это вещество играет роль средства коммуникации между клетками, т.е. является тем, что мы называем средним полем. Этот вывод подтверждается двумя фактами. Во-первых, клетки дрожжей реагировали на импульсы ацетальдегида. Добавление ацетальдегида во время колебаний приводит к сдвигу фазы, зависящему от концентрации добавки (т.е. от величины импульса) и ее фазы (ср. с описанием переустановки фазы в разделе 3.2). Во-вторых, ацетальдегид выделяется осциллирующими клетками.

#### 4.3.4 Экспериментальное изучение ритмических аплодисментов

Возникновение ритмических аплодисментов изучалось недавно экспериментально Néda *et al.* [2000], которые осуществили записи нескольких оперных представлений в Румынии и Венгрии. Они измеряли интенсивность общего шума с помощью микрофона, помещенного под потолком оперного зала, а также звуки индивидуальных аплодисментов с помощью микрофона, спрятанного недалеко от одного из зрителей. Néda *et al.* [2000] подчеркивают, что возникновению синхронных аплодисментов предшествует приблизительное удвоение периода хлопков. Возможное объяснение состоит в том, что при низкой скорости (i) индивиды способны поддерживать свой собственный довольно стабильный ритм (это означает, что каждый «осциллятор» становится менее шумовым за счет уменьшения флуктуации частоты) и (ii) дисперсия частот уменьшается. Оба фактора – уменьшение шума и расстройки – способствуют переходу к синхронизации. Интересно, что уменьшение частоты, направленное на создание синхронности, – это произвольный акт индивида. Как пишут Néda *et al.* [2000], такое коллективное поведение типично для культурно однородных обществ Восточной Европы и лишь изредка наблюдается в Западной Европе и Северной Америке.



## 4.4 Различные примеры

В этом разделе мы иллюстрируем эффект взаимной синхронизации дальнейшими примерами.

### 4.4.1 Бег и дыхание у млекопитающих

Bramble and Carrier [1983] систематически исследовали синхронизацию дыхания и локомоции у бегущих млекопитающих. Захват частоты дыхания и частоты движения конечностей был выявлен у бегущих по конвейерной ленте кроликов, а также у собак, лошадей и людей при беге по твердой поверхности. Было найдено, что при высоких скоростях четвероногие обычно синхронизируют свои локомоторные и дыхательные циклы с постоянным соотношением 1 : 1 (шаг на вдох) как при рыси, так и при галопе (рис. 4.27). Бегущий человек использует несколько режимов с захватом фазы (4 : 1, 3 : 1, 2 : 1, 1 : 1, 5 : 2 и 3 : 2), хотя режим 2 : 1 является, по видимому, предпочтительным (рис. 4.28). Остается неясным, нужна ли синхронизация

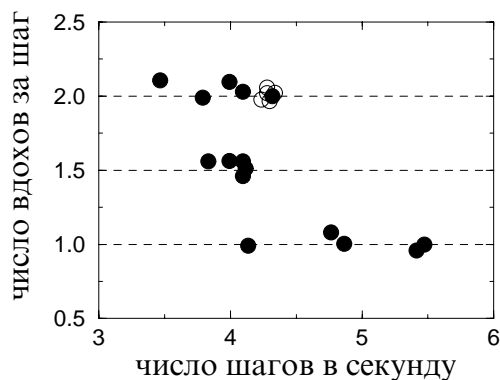


Рис. 4.27. Соотношение между частотой дыхания и прыжков молодого зайца *Lepus californicus*, бегущего по конвейерной ленте. Каждая точка – это среднее из трех последовательных прыжков. Символы ● получены, когда животное еще не достигло зрелого возраста, символы ○ получены, когда оно было почти взрослым. При низких скоростях наблюдалось два полных цикла дыхания на один локомоторный ритм. При высоких скоростях заяц резко переключался на режим синхронизации 1 : 1, тем самым уменьшая вдвое частоту дыхания. Вынужденное бежать со скоростью, соответствующей переходу между этими режимами (примерно четыре прыжка в секунду), животное чередовало эти два режима, демонстрируя захват частот порядка 3 : 2. Нарисовано с использованием данных из [Bramble and Carrier 1983].

дыхания и локомоторной активности для повышения эффективности, или же она просто является физиологически несущественным следствием общего свойства связанных осцилляторов.

Синхронизация сердцебиения, дыхания и локомоции при беге и ходьбе людей по конвейерной дорожке изучалась в работе [Niizeki *et al.* 1993].

#### 4.4.2 Синхронизация двух осцилляторов «соль–вода»

Осциллятор «соль–вода» состоит из пластиковой чашки с водным раствором NaCl, помещенной во внешний сосуд, содержащий чистую воду. Чашка имеет маленькое отверстие снизу. Если измерять электрический потенциал в чашке, то оказывается, что он осциллирует вслед за колебаниями притока чистой и оттока соленой воды. Если две такие чашки помещены в общий внешний сосуд, то, если отношение поверхности чашки к поверхности внешнего сосуда достаточно велико, то наблюдается синхронизация в противофазе [Nakata *et al.* 1998].

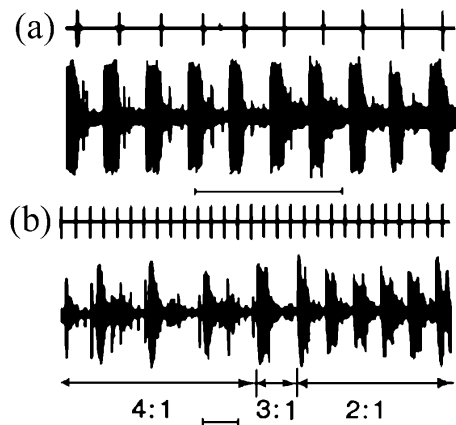


Рис. 4.28. Оциллографическая запись локомоции и дыхания свободно бегущих млекопитающих. Верхняя кривая показывает момент постановки конечности (правой передней ноги у лошади и правой ноги у человека). Нижняя кривая — это дыхание, записанное с помощью микрофона, расположенного в маске на лице. (a) Лошадь в галопе. (b) Человек в момент смены режима 4 : 1 на режим 2 : 1. Горизонтальные отрезки обозначают временной масштаб (2 с). Воспроизведено с разрешения из Bramble and Carrier, *Science*, Vol. 219, 1983, pp. 251–256. Copyright 1983 American Association for the Advancement of Science.



### 4.4.3 Захват колебаний тубулярного давления в нефронах

Обзор эффектов синхронизации, связанных с регуляцией почечного кровотока, приведен в [Yip and Holstein-Rathlou 1996]. Нормальное функционирование почек требует постоянного кровотока. Это обеспечивается специальным механизмом обратной связи (tubuloglomerular feedback), который действует на уровне отдельных нефронов; эта регуляция часто приводит к возбуждению колебаний. Возникающие колебания автономны и независимы от сердечного и дыхательного ритмов. Эксперименты показывают, что соседние нефроны, относящиеся к одной и той же кортикальной радиальной артерии обычно синхронизируют свои колебания. Была высказана гипотеза, что нефроны взаимодействуют за счет распространения сигнала от системы обратной связи вдоль сосудистой сети прегломерулярной области.

Возможно, что явление захвата лежит в основе резонанса, наблюдавшегося в почечном кровотоке, когда артериальное давление колебательно изменялось с частотой, близкой к собственной частоте индивидуальных нефронов. В этой ситуации авторегуляция в почке отсутствует. Вместо этого могут быть обнаружены сильные колебания почечного кровотока и тубулярного давления, синхронные с внешней силой. Наиболее вероятно, что причина этому – индуцированная синхронность нефронов в почке [Yip and Holstein-Rathlou 1996].

### 4.4.4 Клеточные популяции

Бродский [1997] приводит обзор многих экспериментальных работ по изучению ритмов клеточных популяций. В частности, в клеточных культурах наблюдались окологосовые ритмы синтеза белка. Был сделан вывод, что эти ритмы возникают за счет синхронизации колебаний многих клеток, взаимодействующих через общую среду (т.е. глобально связанных); конкретные механизмы такого взаимодействия также обсуждались Бродским. Митюшин и др. [1967] изучали изменение размера клеточных ядер асцитной карциномы Эрлиха. Они обнаружили, что в этой популяции есть группы синхронно пульсирующих клеток.

Vasiliev *et al.* [1966] обнаружили, что для клеточных комплексов (групп нескольких контактирующих клеток) мышинной асцитной гепатомы характерна либо полная синхронность в прохождении

митотического цикла, либо существенная асинхронность. Авторы подчеркивают, «что эта синхронность столь точна, что естественно предположить, что она поддерживается некоторым взаимодействием контактирующих клеток, противодействующим случайным флуктуациям цикла». Они сделали вывод, что синхронность митоза может играть важную роль в развитии тканевой анаплазии (изменении клеточной морфологии), характерной для злокачественных опухолей. Возможный механизм синхронизации клеточных циклов обсуждается в работе [Polezhaev and Volkov 1981].

Milan *et al.* [1996] обнаружили, что в изменяющихся в процессе метаморфоза крыловых дисках фруктовой мушки *Drosophila* прохождение через клеточный цикл происходит в кластерах клеток, синхронизованных в одной и той же фазе клеточного цикла. (Подчеркивается, что эти кластеры – неклонального происхождения, т.е. клетки, принадлежащие этим кластерам, являются потомством различных клеток.)

Синхронизация в культурах спонтанно сокращающихся клеток желудочка сердца изучалась в работе [Soen *et al.* 1999]. Наблюдалось, что поведение ансамбля часто состоит из периодических сокращений, синхронизирующихся в поле видимости. Тем не менее, достаточно длинные записи выявляют сложные нарушения ритма.

#### 4.4.5 Синхронизация колебаний систем хищник–жертва

Колебания численности видов – хорошо известное в экологии явление. Один из наиболее изученных примеров – это численность зайцев и рысей в Канаде (канадский меховой цикл, см. рис. 1.14 и его обсуждение, а также работы [Elton and Nicholson 1942; Blasius *et al.* 1999] и приведенные там ссылки). Удивительно, что колебания численности видов в различных регионах Канады идеально синхронизованы по фазе, хотя их амплитуды нерегулярны и остаются довольно различными (рис. 4.29). Blasius *et al.* [1999] предположили, что нерегулярность амплитуд является следствием хаотической динамики в системе хищник–жертва, а взаимодействие между популяциями в соседних областях происходит за счет миграции животных. Они объясняли наблюдаемое явление синхронизацией в решетке связанных хаотических осцилляторов.

## 4.4.6 Синхронизация в нейронных системах

Исследование синхронизации в больших ансамблях нейронов становится важной проблемой нейробиологии; мы не приводим здесь

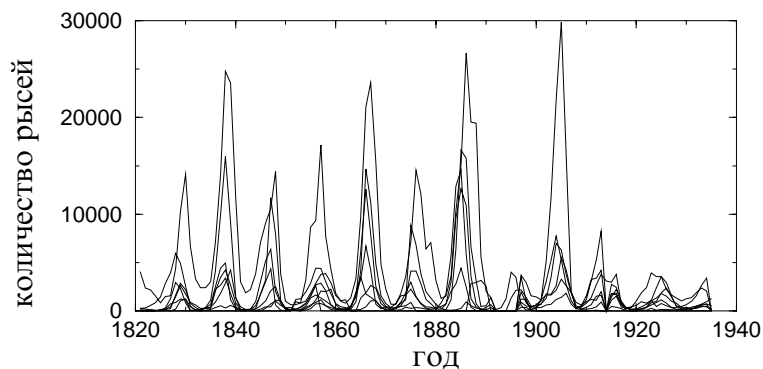


Рис. 4.29. Зависимость численности рысей в девяти регионах Канады от времени. График построен с использованием данных из [Elton and Nicholson 1942].

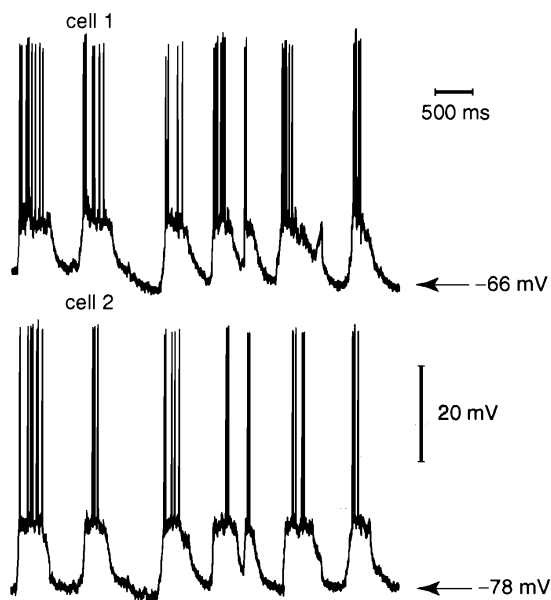


Рис. 4.30. Синхронизация медленных колебаний мембранного потенциала нейронов полосатого тела. Отметим, что генерация спайков (коротких импульсов большой амплитуды, наложенных на медленные колебания) не синхронна. Воспроизведено с разрешением из *Nature* [Stern *et al.* 1998]. Copyright 1998 Macmillan Magazines Limited.

обзора исследований в данной области, а просто упоминаем основные эффекты и приводим некоторые ссылки.

Эффекты синхронизации связаны с несколькими центральными проблемами нейробиологии (см., например, [Singer and Gray 1995; Singer 1999]). Так, по-видимому, синхронизация является центральным механизмом обработки информации нейронами в различных областях мозга, а также коммуникации между этими областями. Результаты экспериментов на животных указывают, что синхронизация нейронной активности зрительной коры, по-видимому, является ответственной за связывание (*binding*) различных, но имеющих друг к другу отношение зрительных черт, в зрительный образ, который распознается как единое целое (см. [Gray *et al.* 1989; Singer and Gray 1995] и приведенные там ссылки). Дальнейшим свидетельством является то, что синхронизация колебательной активности в сенсорно-двигательной коре может служить для интеграции и координации информации, лежащей в основе управления движениями [MacKay 1997].

Синхронизация является механизмом, который поддерживает такие жизненно важные ритмы, как дыхание. Koshiya and Smith [1999] показали, что этот ритм генерируется сетью синаптически связанных пейсмекерных нейронов в нижней части ствола мозга. (Если связь была нарушена фармакологической блокадой синаптического проведения, то нейроны продолжали генерировать ритмически, но не синхронно.) С другой стороны, синхронизация ответственна за генерацию патологического тремора [Freund 1983; Elble and Koller 1990] и играет важную роль в таких серьезных неврологических заболеваниях как эпилепсия [Engel and Pedley 1975].

Синхронная генерация спайков многими нейронами приводит к появлению измеримых флуктуаций сигнала электроэнцефалограммы (ЭЭГ). Спектральный анализ ЭЭГ показывает, что нейроны могут осциллировать синхронно в различных частотных диапазонах (от менее чем 2 до более чем 60 Гц) [Singer 1999]. Одновременная генерация спайков нейронной популяцией – это типовой ответ на различные стимулы: визуальные [Gray *et al.* 1989], обонятельные [Stopfer *et al.* 1997] или тактильные [Steinmetz *et al.* 2000].

Другой тип синхронизации нейронов был описан в [Stern *et al.* 1998]. Они записали мембранный потенциал нейронов полосатого тела в анестезированных животных *in vivo*. Потенциал флуктуирует между двумя подпороговыми состояниями, и во время «верхнего» состояния нейрон генерирует спайки (рис. 4.30). Можно увидеть, что медленные колебания синхронны, в то время как генерация спайков



– асинхронна; моменты генерации спайков определяются шумовыми флуктуациями во время «верхнего» состояния. (Сходные режимы наблюдались в работе [Elson *et al.* 1998] в экспериментах с двумя связанными нейронами из стоматогастрического ганглия омара.)

Stern *et al.* [1998] отметили, что медленные неоднородные флуктуации «вверх–вниз» в клетках коры коррелируют с медленным ( $\approx 1$  Гц) ритмом ЭЭГ во время сна. Было показано, что эти флуктуации зависят от уровня анестезии. С уменьшением уровня анестезии медленные флуктуации различных нейронов коры становятся в меньшей степени синхронизованными, и медленный ритм ЭЭГ становится все более и более слабым, пока не пропадает совсем, хотя колебания индивидуальных нейронов все еще продолжают (см. [Stern *et al.* 1998] и приведенные там ссылки). Отметим, что в нашей терминологии это означает, что анестезия нарушает связь между индивидуальными осцилляторами и, следовательно, среднее поле (медленный ритм ЭЭГ) уменьшается.

## Глава 5

# Синхронизация хаотических систем

В этой главе мы опишем синхронизацию в хаотических системах. Мы начнем с краткого описания хаотических колебаний в диссипативных динамических системах, обращая особое внимание на свойства, важные с точки зрения возникновения синхронизации. Затем мы опишем различные типы синхронизации: фазовую, полную, обобщенную и т.д. При изучении этих явлений часто обращаются к численному моделированию, поэтому для иллюстрации мы обычно будем использовать результаты расчетов; будут, однако, представлены и экспериментальные данные. Где только возможно, мы постараемся проследить аналогию с синхронизацией периодических автоколебаний.

### 5.1 Хаотические колебания

Одним из самых важных достижений нелинейной динамики последних десятилетий было открытие сложных, **хаотических** движений в простых колебательных системах. Теперь это явление подробно исследовано и вошло в программу старших классов школы и первых курсов института; тем не менее, введение в эту тематику представляется не лишним. Термин «хаос» означает, что на больших интервалах времени поведение динамической системы предсказать нельзя, даже если параметры системы не флуктуируют и система не подверже-



на действие шума. Нерегулярность и непредсказуемость вытекают непосредственно из внутренних свойств детерминированной динамики системы, хотя на первый взгляд это утверждение выглядит противоречивым. При представлении хаотических автоколебаний в диссипативной системе в фазовом пространстве выясняется, что им соответствует не такой простой геометрический объект, как предельный цикл, а довольно сложное множество, называемое **странным аттрактором** (в противоположность предельному циклу – простому аттрактору).

### 5.1.1 Пример: модель Лоренца

В 1963 метеоролог Эд Лоренц опубликовал свою знаменитую работу, в которой странный аттрактор был найден при численном исследовании турбулентной конвекции. К счастью, имеется простая физическая реализация *модели Лоренца* – конвекция в вертикальном обруче [Gorman *et al.* 1984, 1986], см. рис. 5.1. Жидкость подогревается снизу, и при достаточно сильном подогреве возникает конвекция. Вблизи порога ее возникновения движение стационарно, с постоянной скоростью  $V$ . Ясно, что вследствие симметрии движение возможно как по часовой стрелке, так и в противоположном направлении. При увеличении подогрева стационарное вращение становится неустойчивым и происходят переключения направления конвективного движения. Более того, эти переключения не регулярны и не повторяются: движение не периодически, а хаотично.

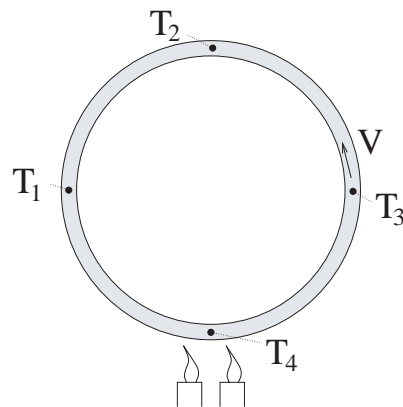


Рис. 5.1. Конвекция вязкой жидкости в тонком подогреваемом снизу обруче хорошо описывается системой Лоренца.

Для теоретического описания хаоса нужно составить модель – систему обыкновенных дифференциальных уравнений. До сих пор мы рассматривали только системы на фазовой плоскости, т.е. с двумя независимыми переменными. Два – это минимальная размерность для существования предельного цикла, но ее недостаточно для хаотического движения. Поскольку траектории в фазовом пространстве не пересекаются (это противоречило бы детерминизму – через данную точку фазового пространства может проходить только одна траектория), на фазовой плоскости невозможно получить что-то более сложное, чем предельный цикл. Хаотическая модель должна быть по крайней мере трехмерной, т.е. состояние осциллятора должно задаваться тремя координатами. Модель Лоренца как раз и описывается тремя переменными  $x, y, z$ , имеющими следующее физическое значение:  $x$  пропорционально горизонтальной разности температур  $T_3 - T_1$ ;  $y$  пропорционально скорости потока  $V$ ;  $z$  пропорционально вертикальной разности температур  $T_4 - T_2$ . Следуя заголовку этой части, мы не будем приводить здесь сами уравнения (см. часть II, уравнения (10.4)), а просто изобразим на рис. 5.2 полученное численно решение. Зависимости всех переменных от времени представляют собой нерегулярные колебания с переключениями между конвективными движениями по часовой стрелке (отрицательные  $y$ ) и против часовой стрелки (положительные  $y$ ).

Мы взяли модель Лоренца как представительный пример хаотических колебаний. Есть много других систем (например, электронные схемы, лазеры, химические реакции), которые демонстрируют хаос и могут быть описаны простыми дифференциальными уравнениями; их описания можно найти в многочисленных книгах о хаосе, см. ссылки в разделе 1.4. Более того, при наблюдении многих естественных процессов можно сделать вывод, что они порождены хаотической динамикой, см. примеры в [Kantz and Schreiber 1997].

Так же как и в случае периодических колебаний, важно различать автоколебания и вынужденные движения. Хаотические автоколебания описываются *автономными* уравнениями, поэтому все моменты времени эквивалентны. Можно сказать, что они обладают непрерывной симметрией по времени (в смысле независимости динамики от сдвига времени). Есть много примеров хаотических движений в нелинейных системах с периодической внешней силой, они описываются неавтономными уравнениями. Сила в этом случае нарушает непрерывную симметрию по времени и делает ее дискретной (только моменты времени, различающиеся на период или несколько периодов внешней силы, эквивалентны друг другу), см. также аналогичное

обсуждение для периодических колебаний в разделе 2.3.2. Другой популярный класс хаотических моделей – отображения – в этом смысле эквивалентен системам с периодической силой. Здесь симметрия по времени очевидным образом дискретна, так как дискретно само время. Для многих свойств хаоса, в частности для явления полной синхронизации (раздел 5.3), различие между автоколебательными и вынужденными системами не существенно. Однако для фазовой синхронизации хаоса (раздел 5.2) оно является решающим.

### 5.1.2 Чувствительность к начальным условиям

Нерегулярность хаотических движений вовсе не означает их полную непредсказуемость. Действительно, кривые на рис. 5.2b выглядят вполне предсказуемо на коротких (меньше характерного периода) интервалах времени; это следует из регулярности колебательных структур на рис. 5.2a. Это полностью согласуется с детерминированностью процесса: если состояние  $x, y, z$  известно в момент времени

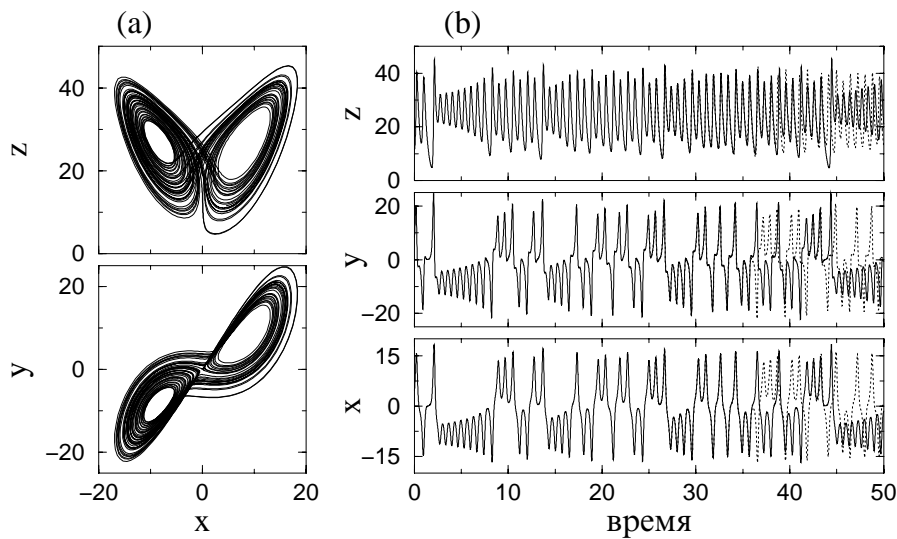


Рис. 5.2. Динамика системы Лоренца (см. уравнения (10.4)). (a) Проекция фазового портрета на плоскости  $(x, y)$  и  $(x, z)$ . Отметим симметрию  $x \rightarrow -x, y \rightarrow -y$ . (b) Зависимости переменных  $x, y, z$  от времени (сплошные линии). На этом рисунке также иллюстрируется чувствительность к малым возмущениям: при  $t = 25$  к переменной  $x$  добавлено возмущение  $10^{-4}$ . Возмущенное решение показано пунктиром, очень скоро оно начинает отличаться от исходного и демонстрирует другую последовательность колебаний.

$t = 0$  с абсолютной точностью, то состояния во все моменты времени  $t > 0$  определены однозначно. Эти состояния задаются решением системы обыкновенных дифференциальных уравнений; на практике для его нахождения используются численные методы. Для поведения хаотических динамических систем характерно следующее: оно *чувствительно зависит от малых возмущений начальных условий*. Это означает, что если взять две близкие точки в фазовом пространстве и следить за их эволюцией, то фазовые траектории, выходящие из этих точек, в конце концов расходятся (рис. 5.2b). Другими словами, даже если начальное состояние хаотического осциллятора известно с большой, но конечной точностью, дальнейшее поведение можно предсказать только на конечном, зависящем от точности, интервале времени, но не на больших временах.

Эта чувствительность свойственна каждой точке траектории, что означает неустойчивость всех движений на странном аттракторе. Количественно неустойчивость измеряется максимальным **ляпуновским показателем**. Обратная к нему величина есть характерное время развития неустойчивости; возмущение приблизительно удваивается на этом интервале времени. На рис. 5.3 мы демонстрируем, как из чувствительности следует нерегулярность. Во-первых, мы рассматриваем только установившиеся (возвращающиеся) состояния, т.е. те, которые когда-нибудь повторяются. Пусть такое состояние 1 после некоторой эволюции примерно повторяется, придя в близкое состояние 2. Это соседнее состояние можно рассматривать как возмущение исходного. Из-за неустойчивости, эволюция состояния 2 будет все более и более отличаться от эволюции состо-

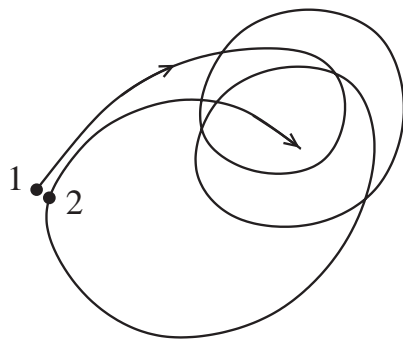


Рис. 5.3. Иллюстрация связи неустойчивости траекторий и нерегулярности: хотя состояние 1 почти повторяется в состоянии 2, в конце концов они расходятся, так что любое повторение оказывается временным.

яния 1.<sup>1</sup> Таким образом, любая повторяемость состояний системы – временная, регулярные повторения определенных структур динамики невозможны. Из неустойчивости следует и перемешивание на хаотических аттракторах: если выбрать множество близких начальных условий, то через некоторое время (обратно пропорциональное наибольшему ляпуновскому показателю) эти точки будут равномерно распределены по всему аттрактору.<sup>2</sup>

Устойчивость движений можно охарактеризовать более подробно. В самом деле, малые возмущения состояния в фазовом пространстве могут возникать по всем возможным направлениям. Число независимых компонент их линейной эволюции в точности равно числу независимых переменных, и для каждой компоненты можно определить инкремент (декремент) неустойчивости (устойчивости); эти инкременты называют ляпуновскими показателями. В модели Лоренца три ляпуновских показателя, поскольку число переменных равно трем.<sup>3</sup> У хаотической трехмерной системы один показатель положителен (он отвечает описанной выше чувствительности), один отрицателен (он отвечает свойству аттрактора притягивать близле-

<sup>1</sup> В устойчивом случае траектории, выходящие из 1 и 2, подходят все ближе друг к другу, что с необходимостью приводит к существованию устойчивого предельного цикла в их окрестности.

<sup>2</sup> В некоторых случаях время перемешивания может быть гораздо большим, что связано со слабой диффузией по фазе, см. раздел 5.2.1.

<sup>3</sup> У  $M$ -мерной динамической системы имеется  $M$  ляпуновских показателей.

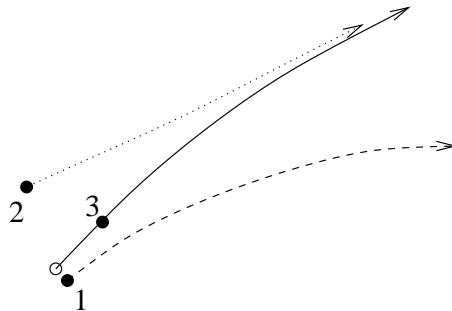


Рис. 5.4. Нарастающее, убывающее и нейтральное возмущения в хаотической системе. Состояние в трехмерной хаотической системе (символ  $\circ$ ) возмущено по одному из трех направлений в фазовом пространстве (символ  $\bullet$ ). Невозмущенная траектория показана сплошной линией. Возмущение 1 растет, соответствующая траектория (штриховая линия) отходит от исходной. Возмущение 2 убывает: траектория (пунктир) подходит к невозмущенной. Возмущение 3 лежит на самой траектории, оно не растет и не убывает.

жащие траектории), и один в точности равен нулю, что соответствует сдвигам вдоль траектории – ясно, что эти возмущения не растут и не убывают.<sup>4</sup> Локальная устойчивость хаотических состояний показана на рис. 5.4. Напомним читателю, что в случае устойчивых периодических автоколебаний один ляпуновский показатель равен нулю, а остальные отрицательны (ср. с рис. 2.6). Последние отвечают притяжению траекторий к аттрактору (предельному циклу), в то время как нулевой показатель соответствует сдвигу точки вдоль предельного цикла, что эквивалентно сдвигу фазы автоколебаний. Это дает основание ввести понятие фазы и для хаотических колебаний, определив ее как переменную, соответствующую нулевому ляпуновскому показателю, или, другими словами, как координату вдоль траектории. Мы покажем, что во многих случаях динамика фазы приводит к интересным эффектам, например к захвату частоты хаотических колебаний. Мы называем эти эффекты «фазовой синхронизацией», чтобы отличить от других типов синхронизации хаотических колебаний, рассматриваемых ниже в разделе 5.3.

## 5.2 Фазовая синхронизация хаотических автоколебаний

Сначала мы покажем, что по крайней мере некоторые хаотические автоколебания можно описывать в терминах зависящих от времени фазы и частоты. Затем будет обоснована возможность синхронизации таких колебаний, где синхронизация понимается в смысле захвата частот. Мы подробно обсудим захват частоты внешним сигналом и проиллюстрируем его на экспериментальном примере.

### 5.2.1 Фаза и средняя частота хаотических автоколебаний

Определение фазы и частоты основано на наблюдении, что многие хаотические автоколебания выглядят как периодические, но с нере-

<sup>4</sup> Свойство иметь нулевой ляпуновский показатель выполняется для автономных систем, которые инвариантны по отношению к произвольным сдвигам времени. В случае систем с периодической силой или в случае отображений система остается неизменной только при дискретных сдвигах времени (на период силы или на единицу времени соответственно), поэтому нейтральных малых возмущений вдоль траектории нет, и в общем случае нулевой ляпуновский показатель отсутствует.

гулярной модуляцией. Например, если для системы Лоренца взять координаты  $z$  и  $u = \sqrt{x^2 + y^2}$  (это, фактически, соответствует специальной двумерной проекции фазового портрета), то траектория на плоскости  $(z, u)$  будет выглядеть как размазанный предельный цикл (рис. 5.5a). Временные зависимости величин  $z$  и  $u$  напоминают периодические колебания с изменяющимися «амплитудой» и «периодом». Сконцентрируем наше внимание на этой последней характеристике колебаний. Поскольку процесс нерегулярный, то период нельзя определить так, как это было сделано для периодических автоколебаний.<sup>5</sup> Вместо этого мы можем определить время между двумя схожими событиями процесса, например, между двумя максимумами переменной  $z$ . В терминах теории динамических систем это можно представить как построение отображения Пуанкаре по условию максимума переменной  $z$  и рассмотрение времен между двумя последовательными пересечениями секущей поверхности (рис. 5.5b). Эти **времена возврата** не постоянны: они зависят от значения переменной на секущей. Эти значения – хаотические, поэтому и времена возврата нерегулярны. Мы можем интерпретировать эти времена как «мгновенные» периоды колебаний и определить средний

<sup>5</sup> Более того, из рассмотрения спектра мощности можно заключить, что в движении присутствует много частот.

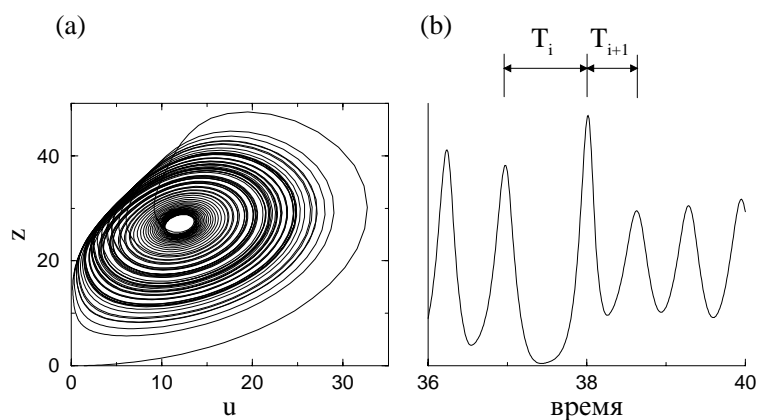


Рис. 5.5. (а) В переменных  $z, u$  динамика системы Лоренца напоминает вращения вокруг центра  $u \approx 12, z \approx 27$  с нерегулярной амплитудой и нерегулярным временем оборота. (б) Времена возврата  $T_i$  показаны на графике зависимости  $z$  от времени как расстояния между максимумами;  $T_i$  можно рассматривать как мгновенный период хаотических автоколебаний.

период процесса  $z(t)$ . Для этого достаточно взять большой интервал времени  $\tau$  и сосчитать число максимумов  $N(\tau)$  переменной  $z$  на этом интервале (или сосчитать число других событий, выбранных для построения отображения Пуанкаре); отношение  $\tau/N(\tau)$  даст *средний период*. Соответственно, средняя угловая частота колебаний может быть определена как  $\langle \omega \rangle = 2\pi N(\tau)/\tau$ . Основная идея фазовой синхронизации хаотических автоколебаний состоит в возможности захвата этой частоты периодической внешней силой или же в возможности ее подстройки к частоте другого хаотического осциллятора в результате их взаимодействия. Для более детального описания процесса полезно определить фазу хаотических автоколебаний.

Действуя в том же духе, что и в случае периодических автоколебаний, мы припишем каждому обороту траектории на рис. 5.5 приращение фазы  $2\pi$ . Используя отображение Пуанкаре, можно считать, что каждому пересечению секущей соответствует определенная фаза (и, конечно, мы выберем ее равной 0). За один оборот между двумя последовательными пересечениями фаза увеличивается на  $2\pi$ . Поскольку времена возврата нерегулярны, мгновенная частота, определенная как обратное время возврата, флуктуирует. Другими словами, фаза вращается не равномерно, как при периодических автоколебаниях, а то ускоряется, то замедляется, причем нерегулярно. В результате *фаза диффундирует как при периодических автоколебаниях с шумом* (см. раздел 3.4). Полную динамику фазы можно представить как комбинацию двух процессов: вращение со средней частотой и случайные блуждания, интенсивность которых пропорциональна вариации времен возврата. Динамика фазы показана на рис. 5.6, ее следует сравнить с соответствующей картиной для осциллятора с шумом, показанной на рис. 3.35.

Подчеркнем, что диффузия фазы слабее расходимости близких траекторий вследствие присущей хаосу неустойчивости. В диффузионном процессе с нулевым средним сносом отклонение от начальной точки растет примерно пропорционально корню от времени; то же справедливо и для расстояния между близкими точками. В отличие от этого, неустойчивость развивается экспоненциально быстро. Более того, если разброс времен возврата мал, то и коэффициент диффузии будет малым, в этом случае хаотические автоколебания выглядят в двумерной проекции как относительно равномерные вращения с хаотической амплитудной модуляцией. Подобные автоколебания часто называют когерентными; в их спектре мощности присутствует узкий пик (примером служит система Рёсслера (см. раздел 1.3 и 10.1)). Отметим также, что вычисление фазы – это нелиней-



ное преобразование, в некотором роде – «нелинейная фильтрация». Действительно, при вычислении фазы мы пренебрегаем вариациями амплитуды, которые обычно вносят вклад в сплошную компоненту спектра мощности процесса. Диффузия фазы ответственна за ширину основного спектрального пика.

На фазовую динамику хаотических систем можно взглянуть и по-другому: взять ансамбль (облако) начальных условий и проследить его эволюцию в фазовом пространстве. Поскольку хаотическая система – перемешивающая, локализованное вначале облако в конце концов расплывается по хаотическому аттрактору. Это расплывание включает в себя быстрое распространение вследствие неустойчивости и диффузию, соответствующую фазе (рис. 5.7).

### 5.2.2 Захват частоты внешней силой. Пример: хаотический разряд в газе

Предположим теперь, что на хаотические автоколебания действует периодическая сила. В случае модели Лоренца, например, можно периодически во времени менять подогрев; такая сила периодически воздействует на переменную  $z$ . Если период силы близок к среднему времени возврата, то движения, убегающие вперед по фазе, замедляются, а отстающие – ускоряются. В результате фаза захватывается внешней силой, как показано на рис. 5.8. Синхронизацию можно также характеризовать как захват частоты: средняя частота хаоти-

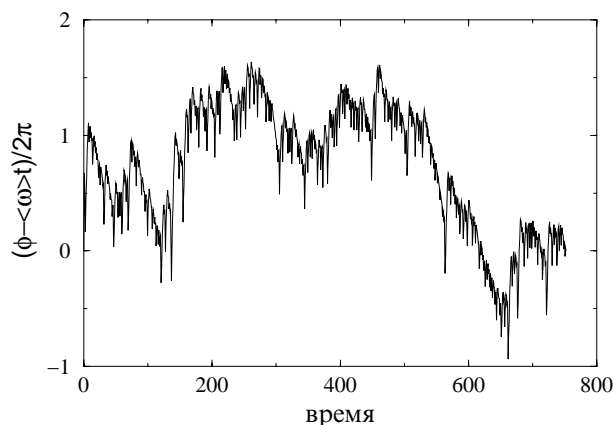


Рис. 5.6. Отклонение фазы системы Лоренца от равномерного вращения выглядит как типичный диффузионный процесс (случайные блуждания).

ческих автоколебаний совпадает (или почти совпадает) с частотой внешней силы.

Описанная выше фазовая синхронизация хаотических автоколебаний наблюдается при средних амплитудах внешней силы. С од-

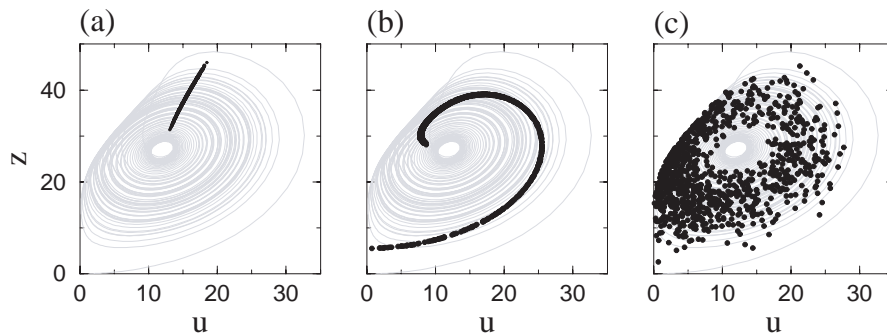


Рис. 5.7. Диффузия фазы в модели Лоренца. Аттрактор показан серым цветом. (а) Множество начальных условий (черные точки) выбрано на секущей поверхности (переменная  $z$  максимальна), все фазы при этом равны нулю. Эволюция этого множества приводится на (b) и (c). (b) По истечении времени  $t = 0.75$  (среднее время возврата) некоторые точки отстают, а некоторые уходят вперед, фазы распределены в конечном интервале, меньшем  $2\pi$ . (c) После дальнейшей эволюции в течение времени  $t = 3.75$  траектории распределяются по аттрактору, что означает, что фазы распределены примерно равномерно от 0 до  $2\pi$ .

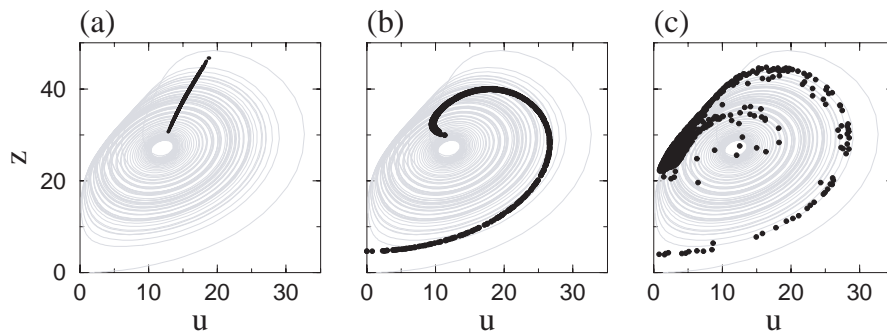


Рис. 5.8. Та же модель Лоренца, что и на рис. 5.7, но с периодической силой (безразмерная частота которой равна 8.3). (а) Начальные условия такие же, как на рис. 5.7а. (b) После одного периода силы фазы более сконцентрированы вокруг среднего значения; отличие от рис. 5.7b, впрочем, мало. Тем не менее, эффект накапливается и после следующих 50 периодов силы различие явно видно на графике (c). Большая часть точек вращается синхронно с силой, хотя некоторые точки не захвачены.

ной стороны, сила должна быть достаточно большой, чтобы подавить диффузию фазы и захватить частоту. С другой стороны, сила должна быть достаточно слабой, чтобы не подавить хаос. Если сила очень большая, то вместо хаоса обычно устанавливается устойчивое периодическое движение (см. раздел 5.3.4).

Представляется уместным описать фазовую синхронизацию хаотических автоколебаний в общем контексте явления захвата частоты. На рис. 5.9 сравниваются периодические, шумовые и хаотические колебания. Захват фазы периодических автоколебаний – полный, он может быть реализован при сколь угодно малой амплитуде силы. Для захвата фазы шумовых и хаотических колебаний необходимо подавить диффузию фазы, поэтому в этих случаях обычно имеется порог синхронизации по амплитуде силы. Отметим также, что захваченные колебания остаются шумовыми или хаотическими: сила вносит в движение некоторый порядок (идеальный ритм), но не делает его полностью регулярным. В целом можно сказать, что фазовая синхронизация хаотических систем очень похожа на синхронизацию шумовых; это позволяет широко интерпретировать наблюдаемый в

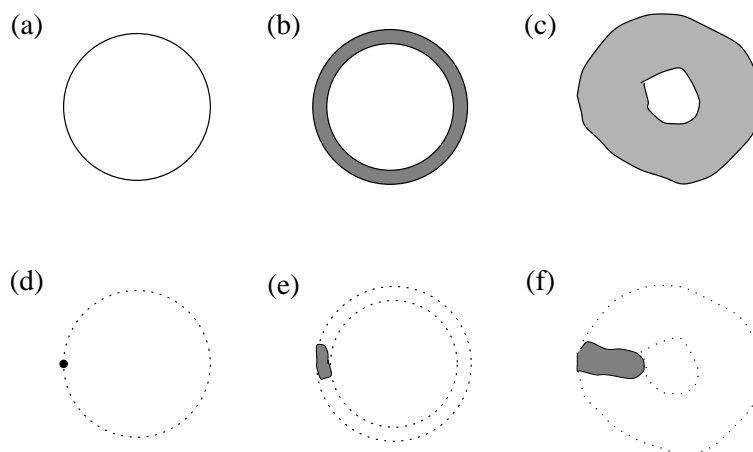


Рис. 5.9. Схематическое представление фазовой синхронизации для периодических (a), (d), шумовых (b), (e) и хаотических (c), (f) автоколебаний. Когда периодические автоколебания (a) захвачены внешней силой, стробоскопически (с периодом внешней силы) наблюдаемая фаза принимает определенное значение (d). Эта идеальная картина частично искажается в присутствии ограниченного шума, но захват тем не менее возможен: флуктуации фазы ограничены (e). Хаотические автоколебания (c) похожи на шумовые (b); здесь диффузия фазы также может быть подавлена, что приводит к состоянию с хаотической амплитудой, но ограниченными флуктуациями фазы (f).

нерегулярных процессах захват фазы (см. главу 6): чтобы идентифицировать синхронизацию по экспериментальным данным, не обязательно выяснять, является процесс шумовым или хаотическим.

Фазовая синхронизация хаоса наблюдалась в ряде экспериментов. Пиковский [1984b] неявно продемонстрировал этот эффект, сравнивая спектры мощности свободных и вынужденных автоколебаний в электронной цепи. В этой работе было показано, что внешняя сила делает более узким пик в спектре (напомним, что ширина пика связана с диффузией фазы, и, как мы уже знаем, внешняя сила подавляет диффузию). Захват частоты электронного хаотического автогенератора наблюдался в [Parlitz *et al.* 1996], см. также [Rulkov 1996]; эксперименты с лазером описаны в [Tang *et al.* 1998a,c].

Для иллюстрации мы выбрали эксперименты [Rosa Jr. *et al.* 2000; Ticos *et al.* 2000], где изучалась фазовая синхронизация хаотического газового разряда периодической силой. Разряд создавался прикладыванием постоянного напряжения в 800 Вольт к трубке, наполненной гелием. Периодическая сила осуществлялась переменным напряжением, подаваемым последовательно с постоянным. Амплитуда переменного напряжения составляла 0.4 В. Сравнение стробоскопических портретов свободного и вынужденного разряда (рис. 5.10) свидетельствует о синхронизации; здесь  $I$  – интенсивность излучаемого лампой света, и фазовый портрет системы показан в запаздывающих координатах  $(I(t), I(t + \tau))$ .<sup>6</sup> Систематически изменяя амплитуду и частоту внешней силы, можно определить область синхронизации.

<sup>6</sup> Время измеряется в единицах интервала выборки. Более подробно о методе реконструкции аттрактора по наблюдаемому скалярному временному ряду можно прочитать в [Abarbanel 1996; Kantz and Schreiber 1997].

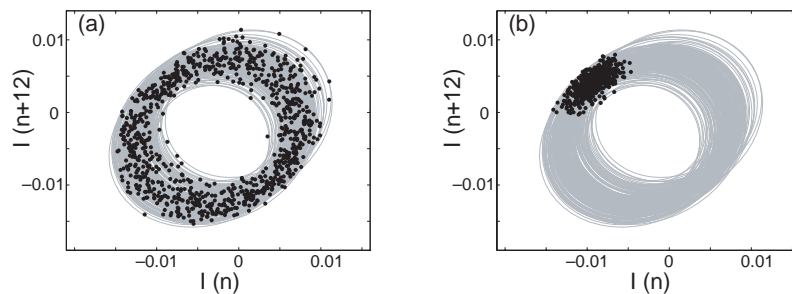


Рис. 5.10. Стробоскопический портрет автономного (а) и вынужденного (б) хаотического газового разряда. Аттрактор показан серым, а состояние, наблюдаемое с периодом силы – кружками. Концентрация кружков на рисунке (б) свидетельствует о фазовой синхронизации (ср. с рис. 5.8 и 5.9). Из [Rosa Jr. *et al.* 2000].

Ее форма (рис. 5 в работе [Ticos *et al.* 2000]) близка к показанной на рис. 3.39: очень слабая сила не может подавить диффузию фазы, и даже при нулевой расстройке синхронизация невозможна.

В заключение этого раздела отметим, что возможна также взаимная синхронизация хаотических осцилляторов. Если параметры двух хаотических систем различны, то и их средние частоты в общем случае не одинаковы. Связь систем приводит к подстраиванию фаз и частот, и они могут захватить друг друга. Как и в случае периодических автоколебаний, слабая связь воздействует только на фазы. В результате, средние частоты двух синхронизованных осцилляторов совпадают, но каждый из них сохраняет амплитудный хаос. В целом, в хаотических системах можно наблюдать те же эффекты, что и для периодических осцилляторов с шумом, например, образование кластеров в цепочке осцилляторов или переход Курамото в ансамбле.

### 5.3 Полная синхронизация хаотических систем

Сильная взаимная связь хаотических осцилляторов приводит к их **полной синхронизации**. В отличие от фазовой, она может наблюдаться в любых хаотических системах, не обязательно автономных – в частности, в системах с периодической внешней силой или в системах с дискретным временем (отображениях). Фактически это явление имеет мало общего с классической синхронизацией периодических автоколебаний, поскольку здесь не происходит подстройки ритма (в частности, мы не можем представить этот эффект в рамках рис. 5.9). Скорее, полную синхронизацию можно характеризовать как подавление различий в связанных *идентичных* системах. Поэтому здесь не идет речь о захвате, это явление ближе к установлению симметрии.<sup>7</sup>

#### 5.3.1 Полная синхронизация идентичных систем. Пример: синхронизация двух лазеров

Чтобы описать этот эффект, возьмем две *идентичные* хаотические системы (например, две системы Лоренца) и введем связь, которая

<sup>7</sup> Возможно, использование другого термина вместо «синхронизация» было бы более уместным; мы все же будем следовать принятой в литературе терминологии, добавляя для определенности прилагательное «полная».

стремилась бы сделать переменные одинаковыми. Будем использовать индексы 1, 2 для идентификации систем; притягивающее взаимодействие стремится уменьшить разности  $|x_1 - x_2|$ ,  $|y_1 - y_2|$  и  $|z_1 - z_2|$ . Далее, мы потребуем, чтобы связь была пропорциональна разности состояний осцилляторов (т.е. пропорциональна  $x_1 - x_2$ ,  $y_1 - y_2$ ,  $z_1 - z_2$ ) и обнулялась бы, если эти состояния совпадают,  $x_1 = x_2$ , и т.д. Тогда при полном совпадении переменных каждая система не будет чувствовать другую, и будет совершать хаотические колебания, как будто они не связаны. Поскольку системы идентичны, совпадение состояний со временем сохраняется. Этот режим и называется **полной синхронизацией**: состояния двух систем совпадают и хаотически эволюционируют во времени.

Очевидно, что полностью синхронное состояние может быть реализовано при любой интенсивности связи, но только при сильной связи можно ожидать, что оно будет устойчивым. В самом деле, предположим, что мы слегка возмутили полностью идентичное состояние, т.е. положим  $x_1 \neq x_2$  и т.д. Что произойдет с малой разностью  $x_2 - x_1$ ? Если бы не было связи, ответ следовал бы из свойства неустойчивости хаоса: поскольку два состояния  $x_1, y_1, z_1$  и  $x_2, y_2, z_2$  можно рассматривать (из-за идентичности) как две начальные точки в одной системе, они будут расходиться экспоненциально по времени, причем скорость роста определяется максимальным ляпуновским показателем. При малой связи расходимость будет слабее, из-за «притяжения» двух состояний. При достаточно сильной связи притяжение преобладает и малое различие будет затухать, так что в конце концов устанавливается полностью синхронное состояние.

Мы видим, что полная синхронизация – пороговое явление: она наблюдается, только если связь превышает критическое значение, пропорциональное ляпуновскому показателю отдельной системы. Ниже порога состояния систем близки, но все же различаются. Выше порога они идентичны и хаотически меняются со временем. Этот переход показан для двух связанных систем Лоренца на рис. 5.11 и 5.12.

Roy and Thornburg [1994] экспериментально наблюдали синхронизацию хаотических колебаний интенсивности двух Nd:YAG лазеров с модуляцией накачки. Связь осуществлялась перекрытием электромагнитных полей внутри резонатора; она могла изменяться в ходе эксперимента. При сильной связи интенсивности были идентичны и продолжали изменяться хаотически (рис. 5.13).

## 5.3.2 Синхронизация неидентичных систем

Рассмотренное выше явление полной синхронизации не может быть, строго говоря, непосредственно обобщено на случай связанных *неидентичных* систем. Ясно, что теперь состояния не могут в точности совпадать, но они могут быть довольно близкими друг к другу. В частности, при достаточно большой связи может существовать функциональная зависимость  $\mathbf{x}_2 = \mathbf{F}(\mathbf{x}_1)$  между состояниями двух систем. Это означает, что, зная функции  $\mathbf{F}$ , можно однозначно предсказать состояние второй системы, если известно состояние первой. Этот режим называют **обобщенной синхронизацией** [Rulkov *et al.* 1995]. Полная синхронизация – это частный случай обобщенной, когда функции  $\mathbf{F}$  – это просто идентичные функции. Обычно обобщенная синхронизация наблюдается при *однонаправленной связи*, когда

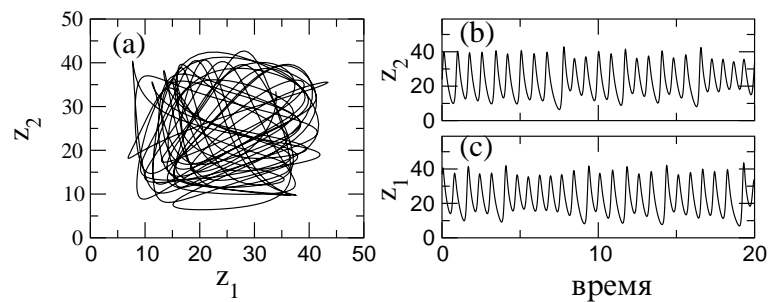


Рис. 5.11. Слабо связанные системы Лоренца (ниже порога синхронизации). (а) Проще всего различие между системами видно на графике, где по осям отложены переменные двух систем (как при изображении фигур Лиссажу). Разница видна также и по временным рядам (b) и (c).

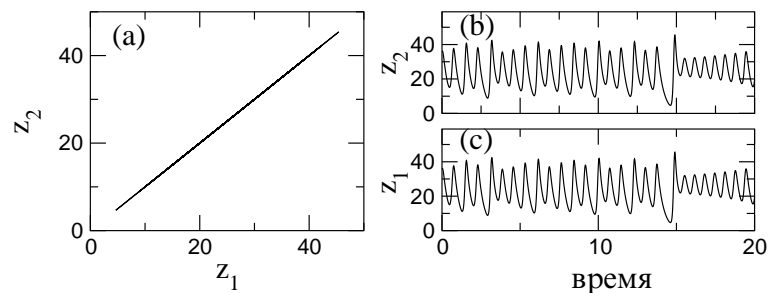


Рис. 5.12. Полная синхронизация в связанных моделях Лоренца. (а) Состояния систем идентичны, что сразу видно на плоскости  $z_1 - z_2$ : траектория лежит на диагонали  $z_1 = z_2$ . Зависимости переменных от времени нерегулярны, но полностью совпадают ((b) и (c)).

одна система (вынуждающая) действует на другую (вынуждаемую), но обратного воздействия нет. Такую ситуацию называют также связью типа «управление–подчинение» (master–slave). Установление обобщенной синхронизации можно интерпретировать как подавление собственной динамики вынуждаемой системы воздействием со стороны другой, так что она «подчиняется управлению».

### 5.3.3 Полная синхронизация в общем контексте. Пример: синхронизация и кластеры в глобально связанных электрохимических осцилляторах

Ряд обобщений описанного выше явления представляются особенно интересными. Одно обобщение основано на наблюдении, что переход к синхронизации можно рассматривать как установление симметрич-

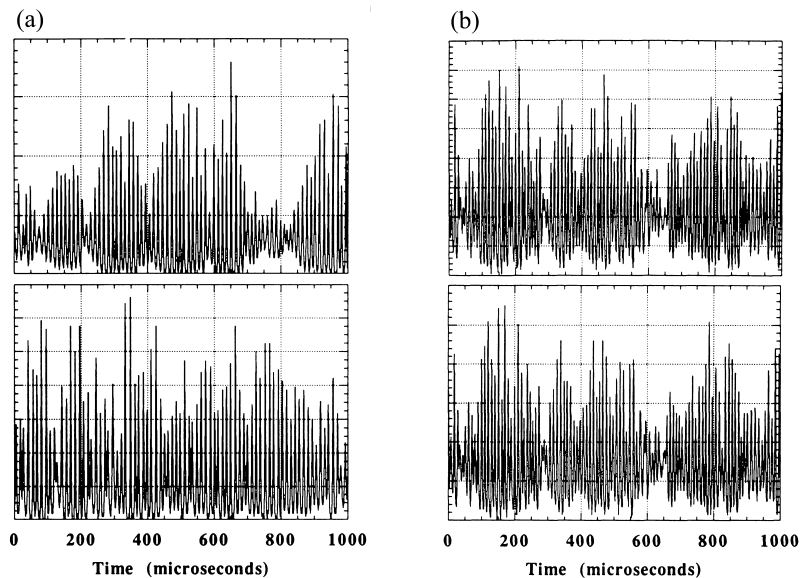


Рис. 5.13. Полная синхронизация в связанных лазерах. (а) Интенсивности (в произвольных единицах) несвязанных лазеров меняются хаотически; они различаются, хотя накачка в обоих лазерах модулируется одинаково. (б) При сильной связи оба лазера продолжают колебаться хаотически, но теперь эти колебания почти одинаковы, т.е. имеет место полная синхронизация. Из Roy and Thornburg, *Physical Review Letters*, Vol. 72, 1994, pp. 2009–2012. Copyright 1994 by the American Physical Society.



ного режима в системе, обладающей соответствующей симметрией. Действительно, требуя чтобы идентичные системы взаимодействовали так, чтобы связь обнулялась при совпадении переменных, мы практически накладываем определенные условия симметрии.

Поэтому можно рассмотреть и более общий случай, когда в большой хаотической системе есть некоторая внутренняя симметрия, например, уравнения движения не меняются при перестановке некоторых переменных (скажем, в четырехмерной системе с переменными  $x, y, z, v$  перестановка  $z \leftrightarrow v$  систему не меняет). Тогда режим, в котором эти переменные совпадают (в нашем примере  $z = v$ ), есть решение, возможно и хаотическое. Если соответствующее малое возмущение  $z - v$  затухает со временем, то симметричное решение будет устойчивым, и можно сказать, что подсистемы  $z$  и  $v$  синхронизованы [Pecora and Carroll 1990]. Такая синхронизация в хаосе иногда тоже называется «управление-подчинение», мы будем чаще говорить о синхронизации системы и ее копии, поскольку обычно уравнение для  $v$  получается просто копированием уравнения для  $z$ . Отметим, что в этой ситуации нет двух систем, которые могли бы функционировать отдельно или быть связанными. Вместо этого, некоторые переменные внутри одной большой системы могут совпадать, внося частичный порядок в хаос.

Общая симметрия, делающая возможной полную синхронизацию, может возникать при большом числе взаимодействующих хаотических систем. Wang *et al.* [2000a] экспериментально изучали синхронизацию 64 электрохимических осцилляторов. Глобальная связь осуществлялась путем соединения всех электродов через общую нагрузку; это эквивалентно схеме, показанной на рис. 4.25. Экспериментаторы

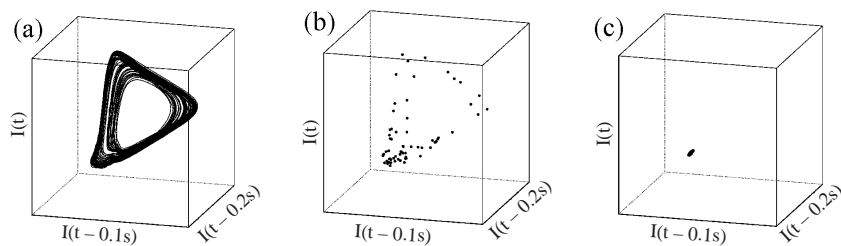


Рис. 5.14. Полная синхронизация в глобально связанных электрохимических осцилляторах. (а) Аттрактор одного несвязанного осциллятора, реконструированный по измерениям силы тока через электрод. (б) Мгновенный снимок ансамбля при отсутствии связи. (с) Мгновенный снимок при достаточно сильной связи – все 64 осциллятора полностью синхронизованы. Из [Wang *et al.* 2000a].

постарались сделать элементы ансамбля как можно более близкими. Фазовый портрет одного изолированного осциллятора показан на рис. 5.14а. Если несвязанные элементы наблюдать в какой-то момент времени, то их состояния будут различны (рис. 5.14b). Они распределены по фазовому пространству так же, как траектория одной системы. Если ввести достаточно большую связь и сделать «снимок» системы в какой-то момент времени, то фазовые точки, описывающие системы, образуют маленькое облачко, почти точку (рис. 5.14с), что свидетельствует о полной синхронизации в ансамбле. При некоторых промежуточных значениях связи можно наблюдать два или три облачка, т.е. несколько синхронных кластеров.

### 5.3.4 Синхронизация путем подавления хаоса

Особый случай синхронизации наблюдается при достаточно сильном периодическом воздействии на хаотическую систему. Такая сила может подавить хаос и привести к периодическим движениям с периодом силы. Такой режим можно характеризовать как синхронизацию через подавление хаоса.

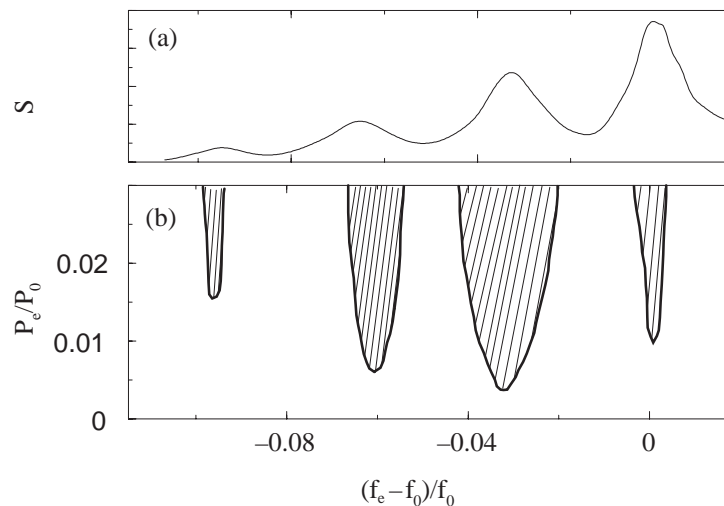


Рис. 5.15. Синхронизация через подавление хаоса внешней периодической силой в лампе обратной волны. (а) Спектр мощности автономного автогенератора имеет несколько широких пиков. Если частота силы близка к этим максимумам, то хаос может быть подавлен. В результате устанавливаются периодические колебания на частоте силы (заштрихованные области на рисунке (b)). Отметим, что сила должна быть достаточно большой. Из [Безручко 1980; Безручко и др. 1981].

Мы проиллюстрируем этот эффект опытами Безручко и соавторов [1979, 1980, 1981], в которых экспериментально исследовалось влияние периодической внешней силы на электронный высокочастотный генератор – лампу обратной волны. При некоторых значениях параметров такой генератор в автономном режиме демонстрирует хаос. Области, в которых сила приводит к периодизации колебаний, показаны на рис. 5.15. Этот график напоминает картину областей синхронизации (языков Арнольда), подробно обсуждавшуюся в разделе 3.2. Отметим, что в отличие от вынуждаемых периодических автоколебаний, здесь области синхронизации не подходят к оси частот, т.е. синхронизация возможна только в том случае, если амплитуда силы превышает некоторый порог. Напомним, что подобная ситуация характерна для синхронизации шумовых колебаний (см. рис. 3.39).

## Глава 6

# Экспериментальное исследование синхронизации

В этой главе мы обсуждаем методы экспериментального исследования синхронизации и даем практические рекомендации по обработке данных. Ранее, представляя различные стороны этого явления, мы иллюстрировали теорию результатами ряда экспериментов и наблюдений. В этих примерах наличие (или отсутствие) синхронизации было вполне очевидным, но так бывает далеко не всегда. Вообще говоря, выявление синхронизации нерегулярных осцилляторов – непростая задача. Бывает, что визуальный анализ колебаний, как у Гюйгенса в его опытах с часами, не помогает, и требуются специальные методы анализа данных. Действительно, даже оценка частоты и фазы сложного сигнала, особенно нестационарного, является сложной проблемой, и мы начнем с ее обсуждения. Далее мы продолжим в двух направлениях: во-первых, мы обсудим, как определить экспериментально свойства синхронизации данной системы (систем); во-вторых, мы используем идею синхронизации для анализа взаимной зависимости двух и более скалярных сигналов. Некоторые технические аспекты анализа данных выделены в приложение П2.

### 6.1 Оценка фазы и частоты по сигналу

Возникновение синхронизации – это появление взаимосвязи между фазами и частотами взаимодействующих систем. Для периодических

осцилляторов эта связь описывается достаточно простыми условиями захвата фаз и частот (см. (3.3) и (3.2)); для систем с шумом и хаотических систем определение синхронизации нетривиально. В любом случае, для определения возникновения синхронизации в эксперименте нам необходимо оценить фазы и частоты по измеряемым данным. Чтобы не рассуждать слишком абстрактно, рассмотрим в качестве примеров электрокардиограмму (ЭКГ) человека и запись дыхания (поток воздуха через нос испытуемого), см. рис. 6.1.

### 6.1.1 Фаза импульсной последовательности. Пример: электрокардиограмма

Существенным свойством ЭКГ является наличие в каждом (нормальном) кардиоцикле хорошо выраженных узких пиков, которые могут быть с высокой точностью локализованы во времени; их традиционно обозначают как R-зубцы (рис. 6.1а). Последовательность R-зубцов может рассматриваться как последовательность точечных событий, происходящих во времена  $t_k$ ,  $k = 1, 2, \dots$ . Фаза такого

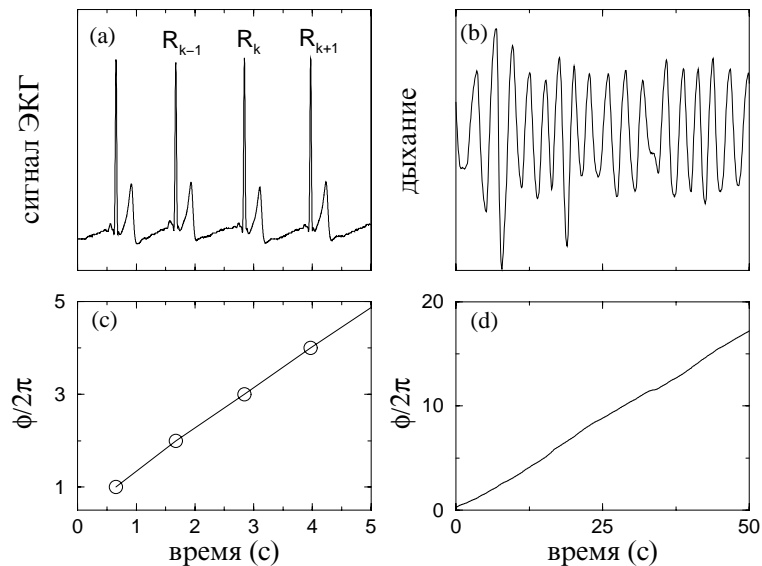


Рис. 6.1. Короткий сегмент электрокардиограммы (ЭКГ) с помеченными R-зубцами (а) и сегмент записи дыхания (б); оба сигнала даны в произвольных единицах. (с) Фаза ЭКГ, вычисленная в соответствии с (6.1), является кусочно-линейной функцией времени; моменты появления R-зубцов помечены окружностями. (д) Фаза дыхания, полученная с помощью преобразования Гильберта (6.2).

процесса может быть легко вычислена. Действительно, интервал времени между двумя R-зубцами соответствует одному кардиоциклу,<sup>1</sup> следовательно, фаза возрастает во время этого интервала ровно на  $2\pi$ . Таким образом, мы можем приписать временам  $t_k$  значения фазы  $\phi(t_k) = 2\pi k$ , а для произвольного момента времени  $t_k < t < t_{k+1}$  определить фазу путем линейной интерполяции между этими значениями:

$$\phi(t) = 2\pi k + 2\pi \frac{t - t_k}{t_{k+1} - t_k}. \quad (6.1)$$

Этот метод может быть эффективно применен к процессу, который содержит ярко выраженные события, и поэтому может быть сведен к последовательности импульсов. Определение фазы с помощью событий-маркеров может быть рассмотрено как аналог метода отображения Пуанкаре (см. раздел 5.2), хотя мы и не предполагаем, что исследуемая система не подвержена влиянию шумов, т.е. не считаем ее динамической.

### 6.1.2 Фаза узкополосного сигнала. Пример: дыхание

Рассмотрим теперь значительно менее сложный сигнал – запись дыхания (рис. 6.1b); она напоминает синусоидальный процесс с медленно меняющейся амплитудой и фазой. Фаза такого узкополосного сигнала может быть получена методом **аналитического сигнала**, предложенного Габором [Gabor 1946]. Реализация этого метода предполагает конструирование по скалярному сигналу  $s(t)$  комплексного процесса

$$\zeta(t) = s(t) + is_H(t) = A(t)e^{i\phi(t)}, \quad (6.2)$$

где  $s_H(t)$  есть преобразование Гильберта от  $s(t)$ . **Мгновенные фаза  $\phi(t)$  и амплитуда  $A(t)$  сигнала однозначно определяются из (6.2).** Отметим, что хотя формально это может быть сделано для произвольного  $s(t)$ , тем не менее  $A(t)$  и  $\phi(t)$  имеют четкий физический смысл только в том случае, если  $s(t)$  – узкополосный сигнал (см. обсуждение свойств и практической реализации преобразования Гильберта в приложении П2).

<sup>1</sup> С точки зрения физиолога кардиоциклы начинаются с R-зубца, который отражает начало возбуждения предсердий. Это не противоречит нашему подходу: мы понимаем цикл как интервал между двумя почти идентичными состояниями системы.

### 6.1.3 Несколько практических замечаний

Важный практический вопрос: какой метод оценки фазы должен быть выбран для анализа конкретной экспериментальной записи? Теоретически, оба метода – преобразование Гильберта и отображение Пуанкаре – могут быть использованы равным образом,<sup>2</sup> но в эксперименте, когда приходится вычислять фазы по короткой, зашумленной и нестационарной реализации, численные проблемы становятся решающими. Наш опыт показывает, что, если сигнал содержит четкие события-маркеры, как, например, ЭКГ, то метод отображения Пуанкаре является наилучшим выбором. Он может быть также применен к «колебательному» сигналу, например, к записи дыхания – в этом случае следует определить «события» (например, пересечения нуля) и вычислить фазу в соответствии с (6.1). Тем не менее, мы не рекомендуем этот способ: его недостатком является то, что на определение событий по медленно меняющемуся сигналу сильно влияют шум и тренд. Кроме того, мы получаем только одну точку на характерный период, и, если запись короткая, то статистика является недостаточной. В этом случае метод, основанный на преобразовании Гильберта, значительно более эффективен, потому что он дает оценку фазы в каждой точке временного ряда. Следовательно, мы получаем много точек на период и можем сгладить влияние шума и получить достаточную статистическую информацию для определения фазовых соотношений. В заключение отметим, что метод, основанный на преобразовании Гильберта, чувствителен к низкочастотному тренду (см. приложение П2). Мы также рекомендуем использовать фильтрацию, если исследуемый сигнал смешан с сигналами других частотных диапазонов.

Другой важный момент состоит в том, что, хотя мы и можем однозначно вычислить фазу сигнала, нам не удастся избежать неоднозначности в оценке фазы осциллятора.<sup>3</sup> Эта оценка зависит от используемой наблюдаемой; тем не менее, «хорошие» наблюдаемые дают эквивалентные фазы (в том смысле, что средние частоты, определенные по этим наблюдаемым, совпадают). В эксперименте мы обычно не свободны в выборе наблюдаемой. Поэтому необходимо

<sup>2</sup> Хотя фазы, полученные этими методами и различаются микроскопически, т.е. на масштабах времен меньших одного (квази)периода, средние частоты, вычисленные по этим фазам, совпадают, а именно эти частоты и важны для описания синхронизации.

<sup>3</sup> Хотя можно вычислить несколько фаз по разным наблюдаемым одного и того же осциллятора, существует только одна фаза системы, соответствующая нулевому ляпуновскому показателю.

всегда соблюдать осторожность в формальном применении изложенных методов и интерпретации результатов.

Частота сигнала может быть определена двумя способами. Если сигнал может быть сведен к последовательности событий и фаза вычисляется по (6.1), то частота определяется путем подсчета числа циклов на единицу времени. Если используется метод аналитического сигнала, то частота определяется путем вычисления наклона графика зависимости фазы от времени. Технические детали см. в приложении П2.

## 6.2 Анализ данных в «активном» и «пассивном» эксперименте

В этом разделе мы обсуждаем две типичные экспериментальные задачи и связанные с ними проблемы анализа данных. Первая задача состоит в том, чтобы выяснить, может ли данный осциллятор быть захвачен определенной внешней силой, или могут ли два осциллятора взаимно синхронизоваться при заданной связи. Вторая экспериментальная задача состоит в том, чтобы проанализировать сигналы, генерируемые двумя осцилляторами, для того чтобы выяснить, взаимодействуют ли эти осцилляторы или же они независимы.

### 6.2.1 «Активный» эксперимент

Мы понимаем синхронизацию как возникновение определенных соотношений между фазами и частотами взаимодействующих объектов. Эти соотношения должны выполняться в некотором диапазоне расстроек и коэффициентов связи (этот диапазон соответствует области синхронизации). Следовательно, чтобы установить возникновение синхронизации в конкретном эксперименте, нам необходимо иметь возможность изменять параметры осцилляторов (или осциллятора и внешней силы), влияющие на расстройку, или же иметь возможность варьировать силу связи. При этом нам необходимо следить за поведением частот и/или разности фаз, т.е. мы должны провести «активный» эксперимент, управляя системой. Классический опыт Эпплтона [Appleton 1922] (см. раздел 4.1) является хорошим примером такого эксперимента.

Полное описание способности систем к синхронизации предполагает определение языка (языков) Арнольда. Тем не менее, если мы просто хотим убедиться в том, что синхронизация данных систем



возможна, то для этого достаточно наблюдать переход к синхронизации при изменении одного параметра. Наиболее простой способ показать переход – это вычислить частоты связанных осцилляторов  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$  (наблюдаемые частоты) и построить график зависимости их разности от изменяемого параметра, как это было сделано Эпплтоном в его эксперименте (см. рис. 4.4).<sup>4</sup>

В современных экспериментах сигналы обычно сохраняются в памяти компьютера для последующей обработки в режиме off-line. В этом случае частоты могут быть вычислены в соответствии с рекомендациями предыдущего раздела и приложения П2. Отметим, что, если сигналы близки к периодическим, то синхронизацию можно выявить простым способом, анализируя классические фигуры Лиссажу, т.е. график зависимости одного сигнала от другого (ср. с рис. 3.9 и 3.23). В случае захвата частот этот график представляет собой замкнутую кривую.

### 6.2.2 «Пассивный» эксперимент

Приступим к обсуждению экспериментов, в которых нет возможности изменять параметры систем и/или связи, а возможно только наблюдать генерируемые ими сигналы. Такая ситуация часто встречается при исследовании биологических или геофизических систем. Характерным примером является исследование взаимодействия сердечно-сосудистой и дыхательной систем человека по двум измеряемым сигналам: ЭКГ и дыханию (см. предыдущий раздел). Проблема состоит в том, чтобы выяснить, какую информацию можно в принципе извлечь из такого эксперимента? В частности, естественным образом возникает вопрос: можно ли выявить синхронизацию путем анализа двухканальных данных?

Вообще говоря, ответ на этот вопрос отрицателен. Так как синхронизация – это не состояние, а процесс подстройки частот и фаз, ее наличие или отсутствие не могут быть установлены по одному наблюдению. Кроме того, в системах с шумом (а реальные системы неизбежно подвержены влиянию шумов), переход к синхронизации размыт и не существует четкой границы между синхронными и несинхронными состояниями. Следовательно, без дополнительных предположений мы не можем выявить синхронизацию путем анализа

<sup>4</sup> Возможны два варианта: можно наблюдать переход к синхронизации, т.е. сближение наблюдаемых частот, либо уменьшая расстройку при фиксированной связи, либо увеличивая связь при неизменной расстройке.

данных, даже если и удастся найти некие соотношения между фазами и частотами (которые должны быть вычислены по сигналам, как описано ранее). Тем не менее, анализ двухканальных данных, основанный на использовании теории синхронизации, может дать важную информацию о взаимосвязи между системами, которые генерируют наблюдаемые сигналы.

Отметим, что определение *зависимости между двумя (или несколькими) сигналами* – это типовая задача обработки данных. Она решается традиционными линейными методами взаимнокорреляционного (взаимоспектрального) анализа [Рабинер и Голд 1975] или нелинейными методами, такими как вычисление взаимной информации или максимальной корреляции [Rényi 1970; Pompe 1993; Voss and Kurths 1997].

Рис. 6.2 иллюстрирует различие этой типовой задачи и проблемы, которую мы рассматриваем ниже: мы пытаемся выявить *взаимодействие между осцилляторами*, которые генерируют двухканальные данные. Подчеркнем, что подход к анализу данных с точки зрения синхронизации явно предполагает, что данные генерируются несколькими (по крайней мере, двумя) взаимодействующими автоколебательными системами. Если это предположение не может быть проверено, то описанные ниже методы могут быть интерпретированы только как средства анализа взаимосвязи между сигналами, и никакого заключения о связи между системами сделано быть не может.

Напомним, что взаимосвязь между фазами может также возникнуть вследствие родственного явления, такого как стохастический резонанс (см. раздел 3.6.3). Другой причиной может быть, например, модуляция скорости распространения сигнала по передающему каналу (см. раздел 3.3.5). Этими замечаниями мы хотим подчеркнуть, что результаты пассивного эксперимента должны интерпретироваться с большой осторожностью; см. подробное обсуждение в разделе 6.4.

### *Совпадение частот или захват частот?*

Если экспериментатор действительно имеет дело с сигналами, генерируемыми двумя автоколебательными системами, и видит, что их частоты близки, то возникает вопрос, является это следствием гипотетического взаимодействия или же просто случайным совпадением. На сегодняшний день не существует способа ответить на этот вопрос, можно только получить косвенное подтверждение гипотезы о взаимодействии.

Прежде всего отметим, что оценка отношения частот не помогает. Действительно, если две частоты равны (в пределах точности их определения), то мы не можем проверить, произошло это случайно, или есть проявление взаимодействия. С другой стороны, если мы нашли, что, например,  $\Omega_1/\Omega_2 = 1.05$ , то это не исключает существование 1 : 1 синхронного режима, так как частые проскоки фазы на границе области синхронизации приводят к различию частот. (Напомним, что в системах с шумом область точного равенства частот может стремиться к нулю.) Поэтому, обычно оценка частот  $\Omega_{1,2}$  может быть использована только для того, чтобы оценить возможный порядок  $n : m$  синхронизации. Более полная информация может

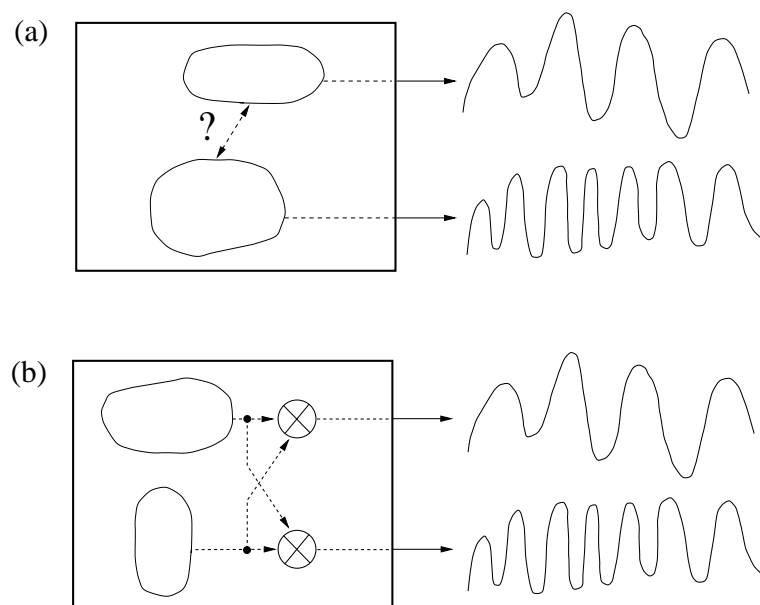


Рис. 6.2. Иллюстрация подхода к анализу двухканальных данных с точки зрения синхронизации. Цель такого анализа – выявить слабое взаимодействие между подсистемами только по измеряемым на их выходе сигналам. Предполагается, что данные генерируются двумя осцилляторами с собственными ритмами (а). Альтернативная гипотеза состоит в том, что измеряется смесь сигналов, генерируемых двумя несвязанными системами (б). Традиционные методы не позволяют различить эти гипотезы. В первом случае, взаимодействие между системами может быть выявлено с помощью анализа фаз, вычисленных по сигналам. Отметим, что взаимосвязь между фазами может быть не только результатом взаимодействия автоколебательных систем, способных синхронизоваться, но и следствием модуляции (ср. с рис. 3.31) или стохастического резонанса (ср. с рис. 3.48).

быть получена из анализа фаз.

Некоторые факторы, типичные для экспериментов, могут оказаться полезными для анализа данных. Ниже мы обсудим два важных аспекта.

- (i) **Шум** усложняет картину синхронизации, но в некоторых случаях «пассивного» эксперимента он помогает отличить случайное совпадение частот от их истинного захвата. Действительно, шум порождает диффузию фазы, и при случайном совпадении частот разность фаз не является постоянной, а совершает случайные блуждания.<sup>5</sup> Распределение  $(\phi_1 - \phi_2) \bmod 2\pi$  является в этом случае практически равномерным, в то время как взаимодействие приводит к появлению максимума в распределении (см. раздел 3.4). Это можно проинтерпретировать как существование предпочтительного значения разности фаз (взятой по модулю  $2\pi$ ), т.е. как захват фаз (в статистическом смысле). Следовательно, нам необходимо анализировать разность фаз; как показано ниже, наиболее эффективен для этого стробоскопический метод.
- (ii) **Нестационарность** данных, вызванная медленным изменением параметров исследуемой системы, существенно усложняет анализ, но может также помочь найти дополнительные аргументы, подтверждающие гипотезу о взаимодействующих осцилляторах. Действительно, если мы наблюдаем, что мгновенные частоты двух сигналов изменяются, но их отношение остается (приблизительно) постоянным, то очень маловероятно, что это происходит случайно; в этом случае вполне разумно считать, что мы наблюдаем захват частот. Другим свидетельством может быть изменение соотношения частот, скажем, с  $\approx 5/2$  на  $\approx 3$ : маловероятно, что это случайность, скорее это похоже на переход между соседними языками Арнольда.

### 6.3 Анализ взаимоотношения между фазами

В этом разделе мы подробно обсуждаем методы анализа фазовых соотношений и иллюстрируем эти методы несколькими примерами.

<sup>5</sup> В общем случае, при  $n\Omega_1 \approx m\Omega_2$  мы должны рассматривать обобщенную разность фаз  $n\phi_1 - m\phi_2$ ; здесь мы для простоты обсуждения предполагаем  $n = m = 1$ .

Данные методы основаны на идее о синхронизации, поэтому мы используем соответствующую терминологию, хотя, строго говоря, по данным мы можем выявить только наличие взаимодействия.

### 6.3.1 Непосредственный анализ разности фаз.

#### Пример: регуляция позы человека

Самый простой способ выявить синхронизацию – это нарисовать зависимость разности фаз от времени и посмотреть, содержит ли этот график горизонтальные участки. В общем случае мы должны строить график *обобщенной разности фаз*

$$\varphi_{n,m} = n\phi_1 - m\phi_2. \quad (6.3)$$

Этот непосредственный метод оказался вполне эффективным для анализа модельных систем и некоторых экспериментально полученных наборов данных.

Для иллюстрации опишем результаты экспериментов по исследованию регуляции позы человека [Rosenblum *et al.* 1998]. Во время опыта испытуемому предлагалось спокойно стоять на специальной жесткой платформе, оснащенной четырьмя тензодатчиками. На выходе этого устройства получают текущие координаты  $(x, y)$  центра давления под стопами стоящего испытуемого. Такие двухканальные данные называются стабิโลграммой; известно, что они содержат информацию о состоянии центральной нервной системы [Гурфинкель и др. 1965; Cernasek 1980; Furman 1994; Lipp and Longridge 1994]. Каждому испытуемому предлагалось пройти три теста, а именно, спокойно стоять в течение трех минут (i) с открытыми глазами (ОГ) при постоянном окружении; (ii) с закрытыми глазами (ЗГ); (iii) с открытыми глазами при наличии специально введенной зрительной обратной связи (ОС). 132 двухканальные записи, полученные в экспериментах с тремя группами испытуемых (17 здоровых, 11 человек с органической и 17 с психогенной патологией) были проанализированы путем вычисления взаимных спектров и обобщенной взаимной информации. Подчеркнем, что взаимозависимость между качаниями тела в антерио-постериальном (вперед – назад) и латеральном (вправо – влево) направлениях была обнаружена только в патологических случаях. Другое наблюдение состоит в том, что стабิโลграммы можно качественно разделить на две группы: шумового и колебательного типов. Последние встречаются значительно реже – только несколько процентов записей могут быть названы колебательными – и только в случае патологии.

Заметное на стабилограммах возникновение колебательных режимов наводит на мысль о возбуждении автоколебаний в системе регуляции вертикальной позы; известно, что эта система включает в себя несколько цепей запаздывающей обратной связи. Тем не менее, независимость качаний в двух перпендикулярных направлениях у здоровых испытуемых и во многих патологических случаях заставляет предположить, что в поддержании вертикальной позы задействованы две отдельные подсистемы. Разумно предположить, что, если в обеих системах возбуждаются автоколебания, то может возникнуть синхронизация. Чтобы выяснить, не является ли зависимость между двумя компонентами стабилограммы следствием соотношения между фазами, мы проанализировали разности фаз.

Здесь мы приводим результаты одного эксперимента (женщина 39 лет, функциональная атаксия). Можно видеть, что при ОГ- и ЗГ-тестах стабилограмма имеет ярко выраженный колебательный

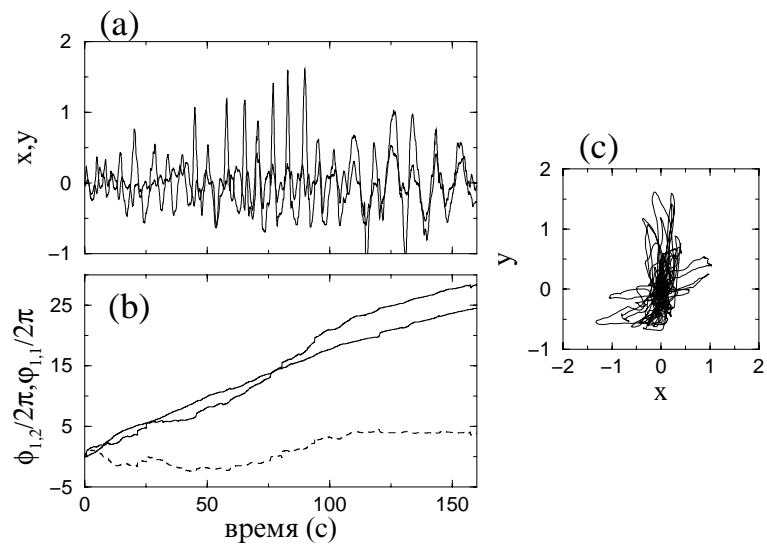


Рис. 6.3. (а) Стабилограмма пациента с неврологической патологией.  $x$  (жирная линия) и  $y$  (сплошная линия) представляют соответственно качания тела при спокойном стоянии с открытыми глазами в антерио-постериальном и латеральном направлениях. Фазы сигналов и разность фаз показаны на (б) соответственно жирной, сплошной и пунктирной линиями. Переход к режиму, в котором разность фаз флуктуирует около постоянного значения, четко виден при  $\approx 110$  с. Типичная зависимость  $y$  от  $x$  не демонстрирует какой-либо структуры, которая указывала бы на зависимость между сигналами (с). Из [Pikovsky *et al.* 2000].

характер (рис. 6.3 и 6.4). Разница между двумя записями состоит в том, что при открытых глазах колебания в двух направлениях асинхронны в течение первых  $\approx 110$  с, но демонстрируют сильную взаимосвязь между фазами в течение последних 50 с. При закрытых глазах, фазы колебаний почти совпадают в течение всего теста. Поведение существенно отличается при ОС-тесте; стабิโลграмма становится шумового типа, и никаких фазовых соотношений не наблюдается. Подчеркнем, что традиционные методы мало эффективны в определении взаимной зависимости этих сигналов из-за их нестационарности и недостаточной продолжительности.

#### Комментарии к методу

Важным преимуществом непосредственного анализа фаз является то, что с помощью зависимости  $\varphi_{n,m}(t)$  можно проследить переходы между качественно разными режимами, происходящие из-за нестационарности параметров взаимодействующих систем и/или связи (рис. 6.3); это оказывается возможным даже для весьма коротких записей. Действительно, два режима, которые можно различить на

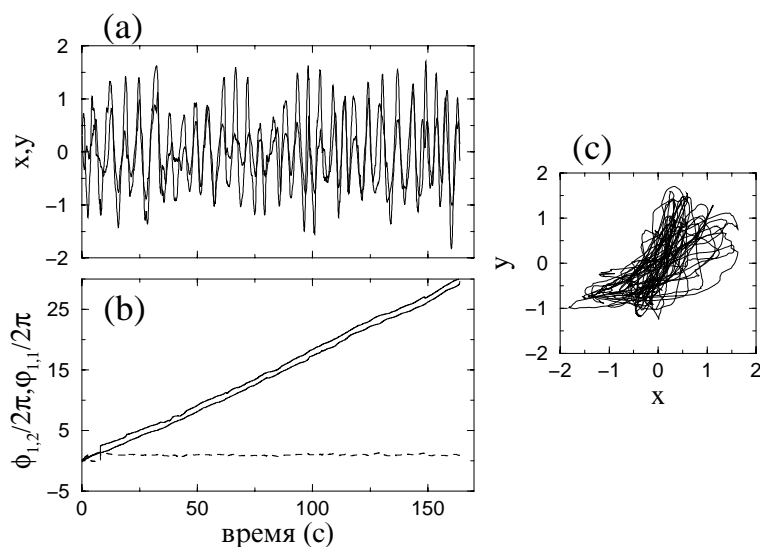


Рис. 6.4. Стабิโลграмма того же пациента, что и на рис. 6.3, полученная при тесте с закрытыми глазами. Все обозначения такие же, как и на рис. 6.3. По графику разности фаз видно, что фазы качаний тела в двух направлениях близки в течение всего теста, в то время как амплитуды остаются нерегулярными и существенно различными. Из [Pikovsky *et al.* 2000].

рис. 6.3, содержат только порядка десяти характерных периодов, т.е. эти эпизоды слишком коротки для надежного использования традиционных методов анализа данных.

Недостатком метода является то, что синхронные режимы порядка, отличного от  $n : m$ , например, синхронизация порядка  $n : (m + 1)$ , выглядят в таком представлении как несинхронные эпизоды. Кроме того, не существует регулярных методов для нахождения целых чисел  $n$  и  $m$ , поэтому они должны искажаться методом проб и ошибок. Соответственно, чтобы выявить все синхронные режимы, необходимо проанализировать большое число графиков. Практически, возможные значения  $n$  и  $m$  могут быть оценены по спектрам мощности сигналов или путем вычисления частот в соответствии с рекомендациями предыдущего раздела; выбор значений  $n$  и  $m$  часто ограничен благодаря дополнительным сведениям об исследуемой системе.

Другой недостаток описанного метода состоит в том, что, если шум достаточно велик, то метод становится неэффективным и даже может ввести в заблуждение. Действительно, частые скачки фазы маскируют наличие горизонтальных участков на графике (ср. с рис. 4.11), и синхронизация может быть выявлена только с помощью статистического подхода, т.е. путем анализа распределения циклической разности фаз, обсуждаемого ниже.

### 6.3.2 Высокий уровень шума

Сильный шум вызывает частые скачки фазы, в результате чего график разности фаз  $\varphi_{n,m}(t)$  демонстрирует перемежаемость коротких горизонтальных участков и быстрых скачков вверх и вниз. Пример такого поведения дан на рис. 4.11. В этом случае полезно вычислить распределение разности фаз  $\Psi_{n,m} = \varphi_{n,m} \bmod 2\pi$ . Действительно, операция деления по модулю делает эквивалентными состояния до и после скачка фазы, и взаимодействие между осцилляторами проявляется возникновением максимума этого распределения.

Визуальный анализ рис. 4.11 показывает, что изображенные данные нестационарны: степень взаимодействия изменяется во времени. (Конечно же, мы не можем выяснить, почему это так; возможно, что сила связи медленно изменяется во времени, или частоты взаимодействующих систем, или и то, и другое.) В этом случае имеет смысл выполнить анализ *методом скользящего окна*, последовательно вычисляя распределение во временном окне  $[t - \tau/2, t + \tau/2]$ , где  $\tau$  — длина окна, для различных  $t$ . Временная зависимость силы взаимодействия может быть охарактеризована показателем, который



описывает отклонение распределения от равномерного. Вычисление таких показателей (индексов) рассмотрено в [Tass *et al.* 1998; Rosenblum *et al.* 2001].

В заключение повторим, что в случае систем с сильным (или неограниченным) шумом невозможно однозначно определить, является ли данное состояние синхронным или нет. В связи с этим определение по данным количественной оценки степени взаимодействия имеет смысл только для сравнения различных состояний одной и той же системы. В частности, это оказалось полезным в двух следующих случаях.

- Вычисление индекса синхронизации как функции времени может выявить изменение взаимодействия во времени. При анализе мозговой и мышечной активности (см. [Tass *et al.* 1998; Tass 1999] и раздел 4.1.7) эта зависимость соответствовала интенсивности тремора; этот факт позволил нам сделать вывод, что процесс синхронизации в мозге является причиной тремора.
- При анализе многоканальных данных, т.е. при взаимодействии многих осцилляторов, вычисление индекса синхронизации для различных пар сигналов помогает в определении относительной степени взаимосвязи между различными сигналами. Так, в вышеупомянутом примере, этот подход позволил установить, какие отделы мозга вовлечены в генерацию патологической активности (тремора).

### 6.3.3 Стробоскопический метод

Здесь мы иллюстрируем применения стробоскопического метода, который был уже использован нами в разделе 3.2 при рассмотрении осцилляторов, подвергаемых периодическому импульсному воздействию. При использовании этого метода фаза возмущенного осциллятора наблюдается с периодом внешней силы,  $\phi_k = \phi(t_0 + k \cdot T)$ , где  $k = 1, 2, \dots$ , а  $t_0$  – (произвольное) время первого наблюдения. Если периодический осциллятор захвачен силой, то распределение  $\phi_k$  есть  $\delta$ -функция; если сила захватывает зашумленный или хаотический осциллятор, то это распределение будет узким. В случае же асинхронного состояния стробоскопически наблюдаемая фаза принимает произвольные значения и, следовательно, ее распределение будет широким.

Простое обобщение делает этот метод очень эффективным инструментом в анализе данных. Для этой цели рассмотрим два связанных

осциллятора и будем наблюдать фазу одного из них не периодически во времени, а периодически по отношению к фазе второго осциллятора. Можно сказать, что второй осциллятор играет роль временного маркера, «освещая»  $\phi_1$  в каждый момент времени, когда  $\phi_2$  возросла на  $2\pi$ . Другими словами, мы выделяем  $\phi_{1k}$  в те моменты, когда  $\phi_2(t) = \phi_0 + 2\pi \cdot k$ . Назовем такой метод *фазовым стробоскопом*. Очевидно, что если второй осциллятор – периодический, то фазовый и временной стробоскопы эквивалентны. Конечно же, не имеет значения, какой из осцилляторов выбран в качестве задающего отсчет (второй в наших обозначениях); выбор полностью определяется удобством определения фазы.

В оставшейся части этого раздела мы объясняем и иллюстрируем примерами, как стробоскопический метод может быть использован для определения взаимодействия (конечно же, при условии, что мы знаем, что сигналы генерируются взаимодействующими автоколебательными системами) при соотношении частот сигналов вида  $n\Omega_1 \approx m\Omega_2$ , или, в общем случае, для выявления сложной взаимозависимости между фазами двух сигналов.

#### 6.3.4 Фазовый стробоскоп в случае $n\Omega_1 \approx m\Omega_2$ .

##### Пример: взаимодействие сердечно-сосудистой и дыхательной систем

Предположим для начала, что есть два  $n : 1$  синхронизованных осциллятора, которые генерируют сигналы типа показанных на рис. 6.1, при этом пусть  $n$  спайков<sup>6</sup> быстрого сигнала приходятся на один цикл медленного, т.е. есть захват порядка  $n : 1$ . Тогда мы будем наблюдать спайки при  $n$  различных значениях фазы медленного сигнала. Подобная картина наблюдается и в случае, когда синхронизации нет, но один процесс модулируется другим. Следовательно, в конкретном эксперименте мы можем использовать этот подход для выявления сложного взаимодействия, но мы не можем различить синхронизацию и модуляцию.

Представляется естественным наблюдать фазу медленного сигнала  $\phi_1$  в моменты появления спайков. Таким образом, построим график стробоскопически наблюдаемой циклической фазы  $\psi(t_k) =$

<sup>6</sup> Если бы не было спайков, то мы могли бы определить события, например, как пересечения нуля в определенном направлении. Другими словами, мы хотим найти те моменты, когда фаза быстрого осциллятора принимает некоторые определенные значения.

$\phi_1(t_k) \bmod 2\pi$  от времени и назовем такой график *синхрограммой* (рис. 6.5). Наличие взаимодействия будет отражено появлением на этом графике  $n$  полос.

Заключительный шаг в развитии стробоскопического метода состоит в обобщении на случай захвата порядка  $n : t$ . Предположим опять, что мы наблюдаем один осциллятор, в то время как фаза второго кратна  $2\pi$ . Тогда, если взаимодействие имеет место, то мы сделаем  $n$  наблюдений за  $t$  циклов первого осциллятора. Чтобы построить синхрограмму, мы должны каким-то образом различать фазы в пределах  $t$  соседних циклов. Для этой цели снова воспользуемся тем, что фаза может быть определена как на окружности, т.е. от 0 до  $2\pi$ , так и на всей действительной оси. Мы часто смешивали эти определения, и диапазон изменения фазы был ясен из контекста. Теперь мы используем следующий прием: возьмем развернутую (т.е. бесконечно растущую) фазу и свернем ее на интервале  $[0, 2\pi t]$  (это означает, что фазы  $\phi = 0$  и  $\phi = 2\pi t$  эквивалентны). Таким образом, мы будем рассматривать  $t$  циклов в качестве одного, и, продолжая процедуру, как было описано ранее, построим зависимость  $\psi_m(t_k) = \phi_1(t_k) \bmod 2\pi t$  от времени (рис. 6.5); индекс  $m$  показывает, как именно фаза была свернута. Отметим, что при таком

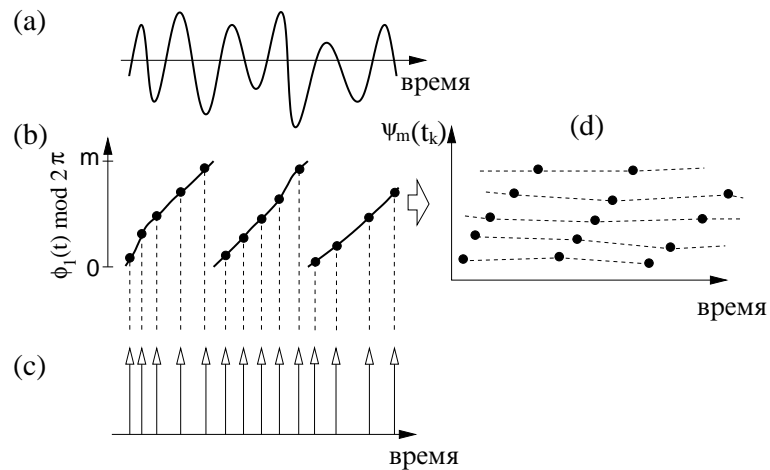


Рис. 6.5. Принцип фазового стробоскопа, или синхрограммы. Медленный сигнал (а) наблюдается в соответствии с фазой быстрого сигнала (с). Измеренная в эти моменты фаза  $\phi_1$  медленного сигнала, свернутая по модулю  $2\pi t$  (т.е.  $t$  соседних циклов взяты в качестве одного длинного цикла), изображена в (d); здесь  $t = 2$ . В таком представлении синхронизация порядка  $n : t$  проявляется в виде  $n$  почти горизонтальных линий в (d); сходная картина наблюдается и при модуляции.

подходе лишь значение  $m$  должно быть определено методом проб и ошибок; при этом различные эпизоды, скажем, с приблизительным соотношением частот  $n : m$  и  $(n + 1) : m$  будут видны на одной и той же синхрограмме.

Рассмотрим анализ фаз для случая взаимодействия сердечно-сосудистой и дыхательной систем человека. Как хорошо известно по крайней мере 150 лет [Ludwig 1847], эти системы не являются независимыми; их взаимосвязь достаточно сложна и до сих пор является предметом изучения физиологов (см., например, [Коершен 1991; Saul 1991] и ссылки там же). В результате этого взаимодействия сердцебиение здорового человека обычно ускоряется при вдохе и замедляется при выдохе, т.е. ритм сердца промодулирован ритмом, связанным с дыханием. Такая модуляция сердечного ритма по частоте (см. рис. 6.10) известна по крайней мере столетие и обычно обозначается как «дыхательная синусная аритмия», см., например, [Шмидт и Тевс 1983] и приведенные там ссылки. Модуляция, силь-

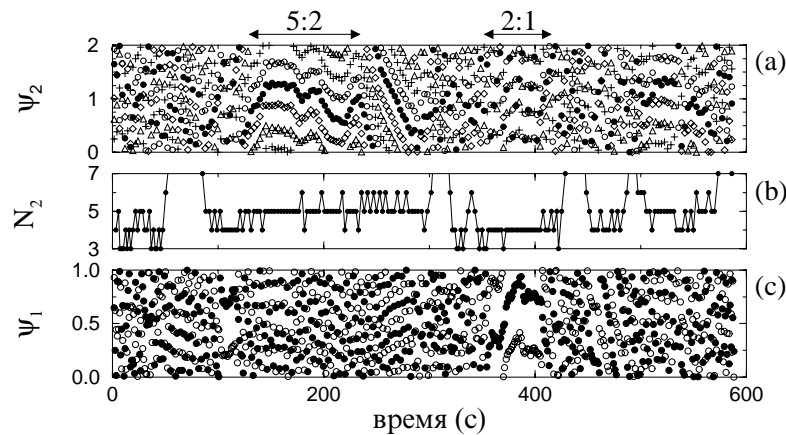


Рис. 6.6. Пример чередования взаимодействия между сердцебиением и дыханием здорового младенца с приблизительным соотношением частот  $2 : 1$  и  $5 : 2$ . (а) Два соседних дыхательных цикла взяты в качестве одного цикла. Следовательно, эпизоды фазовых соотношений порядка  $2 : 1$  и  $5 : 2$  проявляются в виде структур с четырьмя или пятью линиями. (б) Зависимость числа сердцебиений за два дыхательных цикла  $N_2$  также указывает на эпизоды взаимодействия. (с) Если фаза дыхания свернута по модулю  $2\pi$ , то видны только эпизоды взаимодействия с фазовым соотношением порядка  $2 : 1$ . Для наглядности данные показаны различными чередующимися символами (пять и два символа в (а) и (с) соответственно). Построено с использованием данных из [Mrowka *et al.* 2000].

ная нестационарность и высокий уровень шума делают взаимодействие едва заметным. Метод синхрограммы оказался наиболее полезным инструментом для такого анализа [Schäfer *et al.* 1998, 1999; Rosenblum *et al.* 2001].

Двухканальные данные, а именно электрокардиограмма (ЭКГ) и сигнал дыхания, были уже представлены на рис. 6.1. Сигналы, которые мы анализируем, измерены на здоровых новорожденных [Mrowka *et al.* 2000]. Синхрограммы выявляют короткие чередующиеся эпизоды взаимодействия с приблизительными соотношениями частот  $2 : 1$  и  $5 : 2$  (рис. 6.6).

### 6.3.5 Фазовые соотношения при сильной модуляции. Пример: генерация потенциалов действия электрорецепторами веслоноса

Нейман и др. [Neiman *et al.* 1999a, 2000] изучали генерацию потенциалов действия электрорецепторами веслоноса (paddlefish, *Polydon spathula* – рыба из породы осетровых), находящейся в периодическом электрическом поле. Это поле имитировало сигналы, поступающие от зоопланктона – естественной жертвы этой рыбы (см. [Wilkins *et al.* 1997; Russell *et al.* 1999]). Это типичный активный эксперимент (параметры воздействия могут варьироваться), и поэтому он должен анализироваться с помощью зависимости наблюдаемая частота – расстройка. Для этой цели достаточно просто посчитать число спайков на единицу времени и оценить частоту. Конечно, специальные методы анализа здесь не требуются, и мы используем эти данные исключительно как модельный пример для иллюстрации эффективности стробоскопического метода при анализе взаимосвязи между сигналами.

Данные были получены Д. Ф. Расселом, А. Б. Нейманом и Ф. Моссом путем измерения активности электрочувствительного нейрона. Существенной особенностью данных является модуляция генерации спайков внешним электрическим полем (рис. 6.7с).<sup>7</sup> Выяснив, что  $\Omega/\omega_e \approx 11$ , вычислим разность фаз порядка  $1 : 11$  (рис. 6.7а, б). Ее удобно определять в моменты появления спайков. В результате получим  $\phi_{1,11}(t_k) = 11 \cdot \omega_e t_k - 2\pi k$ , где  $t_k$  – время появления  $k$ -ого спайка, а  $\omega_e = 2\pi \cdot 5$ ; нижний индекс  $e$  относится к внешней (external)

<sup>7</sup> Внешняя сила показана схематически, так как нам неизвестны ее форма и начальная фаза, а только частота. Отметим, что в отсутствие внешнего поля интервал между спайками изменяется мало.

силе. Распределение циклической разности фаз  $\Psi_{11,1} = \phi_{1,11} \bmod 2\pi$  показано на рис. 6.7d. Далее воспользуемся стробоскопическим методом; результаты показаны на рис. 6.8.

Приведенный пример показывает, что в случае модуляции стробоскопический метод существенно более эффективен для определения соотношений между фазами двух сигналов, чем простой анализ разности фаз. Отметим, что флуктуации  $\phi_{11,1}(t)$  очень сильны (их размах порядка  $\approx 2\pi$ ). В результате распределение циклической разности фаз не является унимодальным и не указывает на наличие взаимодействия. Напротив, 11 полос, заметных на синхрограмме, четко указывают на сложную связь; модуляция проявляется лишь в неравном расстоянии между полосами.

Суммируя вышесказанное, мы можем сделать вывод, что нельзя предложить универсальный рецепт выбора метода анализа. Этот выбор определяется конкретным набором данных. При анализе сложных шумовых сигналов не следует полагаться только на один метод.

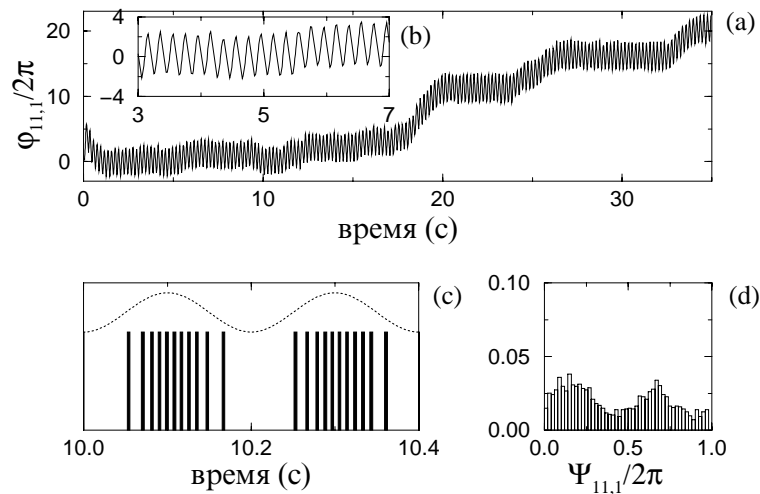


Рис. 6.7. Фазовые соотношения между нейроном, генерирующим спайки, и внешним электрическим полем. (а, б) График разности фаз подтверждает гипотезу о сложной взаимосвязи между данными. Исходные сигналы изображены в (с); показаны два периода внешней силы; в этом интервале времени видны две группы по 11 спайков. Отметим, что из-за сильной модуляции флуктуации разности фаз (а, б) очень сильны, поэтому соответствующее распределение (д) циклической фазы не является унимодальным. Из этих графиков неясно, связаны ли сигналы между собой; метод синхрограммы (рис. 6.8) оказался здесь значительно более эффективным. Данные предоставлены Д. Ф. Расселом, А. Б. Нейманом и Ф. Моссом.

Мы рекомендуем комбинировать простейшие методы, например, подсчет числа спайков на период внешней силы с вычислением распределения разности фаз и стробоскопическим методом.

## 6.4 Заключение и библиографические заметки

### 6.4.1 Несколько заметок о «пассивных» экспериментах

Мы завершаем обсуждение экспериментальных методов несколькими замечаниями. Мы хотим еще раз подчеркнуть, что обратная задача – попытка выявить взаимодействие между осцилляторами, не имея доступа к их параметрам, только на основе анализа данных – неоднозначна. Мы предостерегаем против слепого применения синхронизационного анализа двухканальных данных и неосторожной интерпретации результатов. Выскажем четыре замечания:

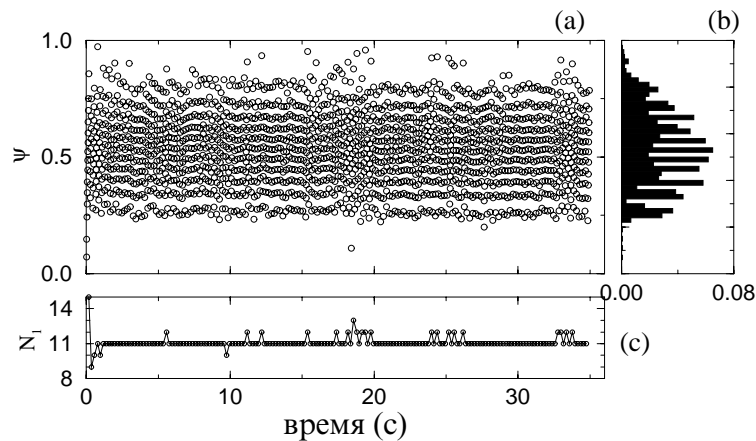


Рис. 6.8. Стробоскопический метод (синхрограмма) очень эффективен при анализе взаимосвязи в том случае, когда частота генерации электрочувствительного рецептора веслоноса значительно выше частоты внешнего поля. (а) Одиннадцатиполосная структура синхрограммы делает очевидным наличие взаимодействия (за исключением коротких эпизодов); это подтверждается соответствующим распределением в (b). (с) График зависимости числа спайков на период внешней силы также подтверждает, что частоты находятся в соотношении приблизительно 11 : 1. Данные предоставлены Д. Ф. Расселом, А. Б. Нейманом и Ф. Моссом.

- (i) **Синхронизационный анализ основан на предположении.** Не следует забывать, что синхронизационный анализ двухканальных данных основан на предположении о существовании двух колебательных систем, которые либо взаимодействуют, либо осциллируют независимо. Если это неверно, то анализ не имеет смысла; это проиллюстрировано на рис. 6.9.
- (ii) **Не все наблюдаемые хороши.** В качестве контрпримера рассмотрим два сигнала, которые действительно отражают состояние двух автоколебательных систем, а именно сердечно-сосудистой и дыхательной, но только один из сигналов годится для вычисления фазы. Данные – последовательность интервалов между сердцебиениями (RR) и дыхание – показаны на рис. 6.10. Можно сказать, что эти сигналы изменяются синхронно, но мы подчеркнем, что RR-интервалы отражают именно изменение периода сокращения сердца, а не исходный ритм. Сокращение в постоянном ритме дало бы постоянные RR-интервалы. Следовательно, оценка фазы по этому временному ряду методом преобразования Гильберта, хотя формально и возможна, но дает угловую переменную, которая не связана с

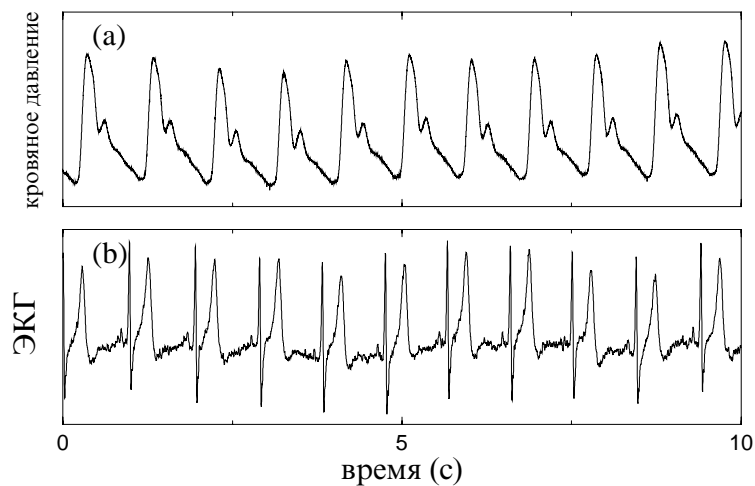


Рис. 6.9. Запись кровяного давления, измеренного с помощью системы Finapres на указательном пальце (a) и электрокардиограмма (b). Один импульс кровяного давления соответствует одному сердечному сокращению, но иначе и быть не может. Наблюдаемые отражают изменение двух переменных, относящихся к автоколебательной и пассивной системам. Это пример ситуации, когда синхронизационный анализ бессмысленен. Данные предоставлены R. Mrowka.



истинной фазой.

- (iii) **Мы определяем взаимодействие, а не синхронизацию.** Строго говоря, тот факт, что распределение циклической разности фаз  $(\phi_1 - \phi_2) \bmod 2\pi$  двух автоколебательных систем имеет максимум, указывает только на наличие взаимодействия, а не синхронизации. Напомним, что для периодических осцилляторов вне языка Арнольда, но близко к его границе, разность фаз растёт неравномерно (см. рис. 3.8). Для систем с шумом переход к синхронизации размыт, и на вопрос, является ли состояние синхронным, нельзя ответить однозначно. Более того, наличие максимума в распределении циклической разности фаз может появиться в результате модуляции сигнала. Следовательно, некорректно говорить о выявлении синхронизации; необходимо все время иметь в виду, что анализ пассивного эксперимента может указать только на наличие взаимодействия.
- (iv) **Анализ фазовых соотношений в сравнении с другими методами.** Интересно отметить, что анализ фазовых соотношений и взаимнокорреляционный (взаимноспектральный) анализ

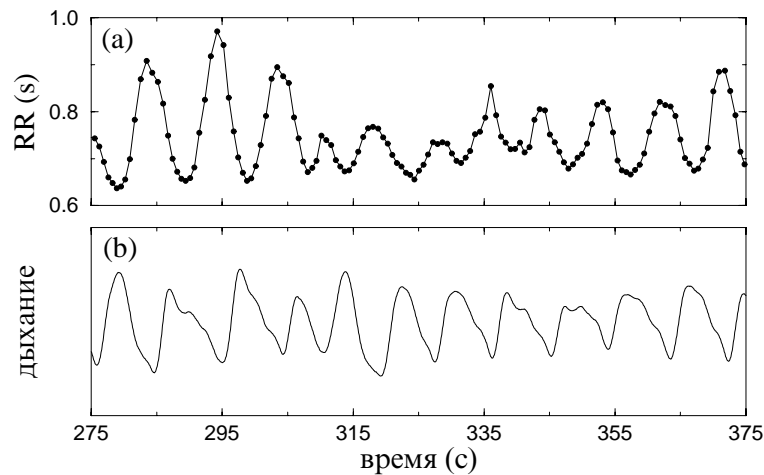


Рис. 6.10. Интервалы между сокращениями сердца (а) осциллируют в соответствии с дыханием (b), показанным в произвольных единицах. Это пример ярко выраженной дыхательной синусной аритмии у молодого спортсмена. С физической точки зрения эти колебания являются эффектом модуляции, которая может сопровождаться, а может и не сопровождаться, синхронизацией. Из Schäfer *et al.*, *Physical Review E*, Vol. 60, 1999, pp. 857–870. Copyright 1999 by the American Physical Society.

выявляют различные аспекты взаимодействия между системами. Некоторые примеры показывают, что два коррелированных (когерентных) сигнала могут генерироваться несинхронными осцилляторами [Tass *et al.* 1998]. Эта проблема пока не была изучена систематически.

#### 6.4.2 Количественное оценивание фазовых соотношений и его статистическая значимость

Естественная проблема в анализе соотношения между фазами  $\phi_{1,2}$  – это вычисление количественной характеристики этой связи. Недавно было предложено несколько таких характеристик. Palus [1997] вычислял взаимную информацию между двумя фазами. Tass *et al.* [1998] характеризовали отличие распределения разности фаз от равномерного с помощью энтропии Шеннона; другой мерой является первая Фурье-гармоника этого распределения [Rosenblum *et al.* 2001]. Еще один подход основан на вычислении условной вероятности того, что  $\phi_1$  принимает определенное значение при условии, что  $\phi_2$  является константой; это эквивалентно вычислению характеристики распределения стробоскопически наблюдаемой фазы [Tass *et al.* 1998; Rosenblum *et al.* 2001]. Toledo *et al.* [1999] характеризовали вертикальный размер полос на синхрограмме. Neiman *et al.* [1999b] и Anishchenko *et al.* [2000] использовали коэффициент диффузии фазы как меру степени синхронизации; вычисление этого коэффициента требует очень длинных временных рядов, что усложняет применение этой меры в реальном эксперименте. Кроме того, это – относительная характеристика (необходимо сравнивать диффузию несвязанных и связанных осцилляторов), так что, по-видимому, она более эффективно может использоваться в активных экспериментах наряду с вычислением кривых наблюдаемая частота – расстройка.

В настоящий момент не существует методов оценки статистической значимости фазового анализа. Было несколько попыток решить эту проблему с использованием суррогатных данных. Чтобы сконструировать такие данные, Seidel and Herzel [1998] рандомизировали фазы Фурье, что, по-видимому, является слишком слабым тестом. Tass *et al.* [1998] оценивали значимость индекса синхронизации, используя в качестве суррогатных данных белый или инструментальный шум, отфильтрованный тем же образом, что и сигнал. При исследовании взаимодействия сердечно-сосудистой и дыхательной

систем, Toledo *et al.* [1999] выполняли тест с суррогатными данными, взяв записи сердцебиения и дыхания от разных испытуемых, или же обращая во времени запись интервалов между сердцебиениями. Сложности в конструировании подходящих суррогатных данных обсуждаются в [Schäfer *et al.* 1999; Rosenblum *et al.* 2001]. Отметим, что тесты с суррогатными данными требуют количественной меры взаимосвязи.

### 6.4.3 Некоторые полезные ссылки

Специальный тип активного эксперимента описан Глассом и Мэки [1988]. Они изучали переустановку фазы (phase resetting) осциллятора одиночным импульсом (см. раздел 3.2.3). Прикладывая стимул в различных фазах, они экспериментально получили зависимость  $\phi_{\text{new}} = \mathcal{F}(\phi_{\text{old}})$ , т.е. отображение окружности. Численное итерирование этого отображения позволяет предсказать свойства синхронизации осциллятора, возмущенного периодической последовательностью импульсов.

В нашем изложении синхронизационного подхода к анализу двухканальных данных мы следовали нашим предыдущим публикациям [Rosenblum *et al.* 1997a; Rosenblum and Kurths 1998; Rosenblum *et al.* 1998; Schäfer *et al.* 1998, 1999; Tass *et al.* 1998; Rosenblum *et al.* 2001]. Этот подход предполагает только оценку соотношения между фазами, в то время как нерегулярные амплитуды могут быть некоррелированы. Нерегулярность может маскировать захват фаз, поэтому традиционные методы, анализирующие не фазы, а исходные сигналы, могут быть менее чувствительны к выявлению взаимосвязи между системами. Mormann *et al.* [2000] использовали концепцию фазовой синхронизации в анализе электроэнцефалограмм, записанных у пациентов с эпилепсией височной доли. Они наблюдали пространственные и временные изменения в синхронности, связанные с патологической активностью.

Rodriguez *et al.* [1999] использовали для оценки фазы сигнала вейвлет Габора; этот метод может быть использован в случае захвата 1 : 1 (один и тот же вейвлет используется для обработки обоих сигналов). Этот метод, по-видимому, близок к методу аналитического сигнала.

Графическое представление, схожее с синхрограммами, было введено в контексте анализа взаимодействия между сердечно-сосудистой и дыхательной системами в работах [Stutte and Hildebrandt 1966; Pessenhofer and Kenner 1975; Kenner *et al.* 1976].

Вместо фазы авторы откладывали по оси  $y$  интервал времени между двумя вздохами. Поскольку сворачивания фазы не проводилось, то этот графический метод позволял обнаружить только захват порядка  $1 : m$ . Этот простейший вариант синхрограммы был также использован в работах [Hoyer *et al.* 1997; Schiek *et al.* 1998; Seidel and Herzel 1998]. Bračić and Stefanovska [2000] использовали метод синхрограммы для анализа взаимосвязи между сердечными и дыхательными ритмами у здоровых испытуемых (не спортсменов) в состоянии покоя. Toledo *et al.* [1998] показали, что такая взаимосвязь может наблюдаться и у больных после пересадки сердца. У этих пациентов отсутствовала непосредственная регуляция ритма сердца со стороны автономной нервной системы, поэтому в этом случае взаимосвязь возникает за счет каких-то других механизмов взаимодействия.

Отметим также, что Schiff *et al.* [1996] использовали понятие динамической взаимосвязи, введенное в [Pecora *et al.* 1997a], и вычисление взаимной информации для подтверждения предположения о том, что двухканальные данные генерируются двумя синхронизованными системами, где синхронизация понималась в смысле функционального взаимоотношения между состояниями двух систем (обобщенная синхронизация); см. также [Arnhold *et al.* 1999]. Так как режим фазовой синхронизации возникает при более слабой связи, чем режим обобщенной синхронизации, мы полагаем, что анализ, основанный на идее фазовой синхронизации, более чувствителен.

Интересно отметить, что идея, схожая с идеей фазового стробоскопа, была реализована 40 лет назад в устройстве, названном кардиосинхронизатором. Оно позволяло получать рентгеновские изображения сердца в произвольно выбранной фазе кардиоцикла [Цетлин 1969]. Конечно же, это не является синхронизацией в нашем понимании, так как сердечно-сосудистая система наблюдалась в соответствии с ее собственной фазой.